Chapitre 4 : Problème du plus court chemin

I. Introduction

Ce problème intervient principalement dans le fonctionnement des routeurs d'un réseau informatique (protocoles de routage). La recherche du plus court chemin est analogue à la recherche du plus long chemin.

II. Définition

Soit *G=(X,U)* un graphe valué, l'interprétation de la valeur de chaque arc peut être: coût de transport,distance, dépense de construction,temps nécessaire de parcours, ...

- La longueur d'un chemin entre deux sommet *x et y* dans un graphe valué est :

$$Longueur\_Ch\ (x, y) = \sum_{u \in Ch} f(u)$$

tel que *f(u)* est la fonction qui fournit la valeur de l'arc *u*.

- La distance, notée $d_G\ (x\ ,\ y)$, entre deux sommets d'un graphe G est la longueur du plus court chemin entre les extrémités *x et y*. S'il n'y a pas de chemin entre *x et y* on considère que $d\ (x\ ,\ y) = \infty$

Nous verrons dans la partie algorithmique les méthodes de calculs de cette distance :

III. Algorithme 8 : Algorithme de Dijkstra

```
Algorithme 8 :permettant de trouver le plus court chemin
entre deux sommet Sdeb et Sfin
-------------------------------------------------------------
Entrée: G=(X;U)un graphe valué, Sortie: plus court chemin
-------------------------------------------------------------
Début
1. Soit la matrice L (chaque colonne représente un sommet)
2. Initialement tous les sommets sont « non marqué »
3. Affecter la valeur 0 à L(Sdeb)et ∞ à tous les autres sommets
4. Tant Que Sfin n'est pas marqué faire
      Marquer le sommet x non marqué de plus petit de L
      Pour chaque sommet y non marqué voisin de x faire
          L(y) = min { L(y), L(x) + M(x,y) }
      FinPour
   FinTantque
Fin
```

Tel que M est la matrice des longueurs (matrice d'adjacence) dont chaque élément $m_{i,j}$ est définit comme suit :

$$M_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & Si\ l'arc\ u = (x_i, x_j) \in à\ U \\ \infty & Si\ l'arc\ u = (x_i, x_j) \notin U \\ 0 & Si\ \ i=j \end{cases}$$

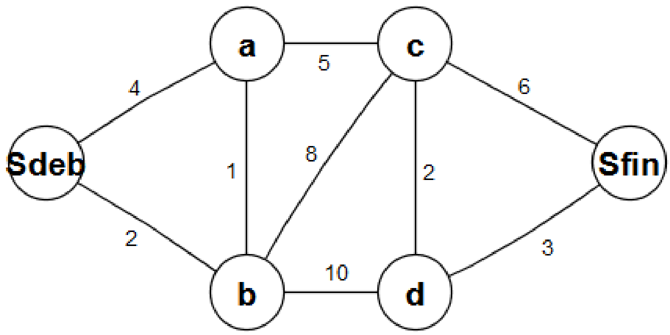
Chapitre 4 : Problème du plus court chemin

Remarques :

- il ne s'applique qu'aux graphes à valuations positives
- il ne marche que pour trouver les plus courts chemins
- pour chaque sommet dans le chemin, sauvegarder toujours le sommet précèdent

Exemple :

M	S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}
S_{deb}	0	4	2	∞	∞	∞
a	4	0	1	5	∞	∞
b	2	1	0	8	10	∞
c	∞	5	8	0	2	6
d	∞	∞	10	2	0	3
S_{fin}	∞	∞	∞	6	3	0



Solution :

Itération 1: `Marquer le sommet` **`x`** `non marqué de plus petit de` **`L`**

L	S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}
	0	∞	∞	∞	∞	∞

`Pour` `chaque sommet` **`y`** `non marqué voisin de` **`x`** **`faire`**

$$L(\mathbf{y}) = \min\{ L(\mathbf{y}),\ L(\mathbf{x}) + M(\mathbf{x},\mathbf{y}) \}$$

$x = S_{deb}$ donc, $y \in \{a, b\}$ ➔ calculer : $L(a)$, $L(b)$

L	S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}	
	0	∞	∞	∞	∞	∞	$L(a) = \min\{\infty, 0 + 4\} = 4$ $L(b) = \min\{\infty, 0 + 2\} = 2$
	.	4	2	∞	∞	∞	

Itération 2 : `Marquer le sommet` **`x`** `non marqué de plus petit de L`

L	S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}
	0	∞	∞	∞	∞	∞
	.	4	2	∞	∞	∞

$x = b$ et $y \in \{a, c, d\}$ ➔ calculer : $L(a)$, $L(c)$, $L(d)$

$L(a) = \min\{4, 2+1\}=3$; $L(c)= 2+8=10$; $L(d)=12$

L	S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}
	0	∞	∞	∞	∞	∞
	.	4	2	∞	∞	∞
	.	3	2	10	12	∞

Itération 3

L	S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}
	0	∞	∞	∞	∞	∞
	.	4	2	∞	∞	∞
	.	3	.	10	12	∞

$L(c) = \min\{10, 3 + 5\} = 8$

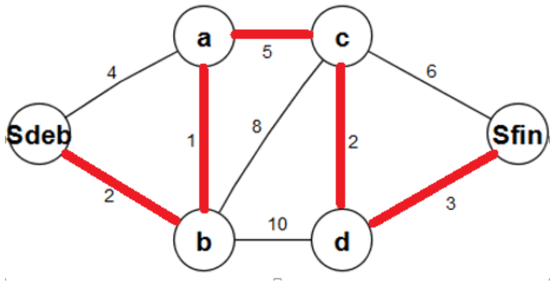
Itération 4

L	S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}
	0	∞	∞	∞	∞	∞
	.	4	2	∞	∞	∞
	.	3	.	8	12	∞

Itération …

L	S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}
	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	.	4	$\underline{2}$	∞	∞	∞
	.	$\underline{3}$	.	8	12	∞
	.	.	.	$\underline{8}$	12	∞
	.	.	.	.	$\underline{10}$	14
	.	.	.	.	.	$\underline{13}$

S_{deb}	a	b	c	d	S_{fin}
	b	S_{deb}	a	c	d



Le plus court chemin est: S_{deb} , b , a , c , d , S_{fin}

IV. Algorithme 9 : Algorithme de Bellman-Kalaba

Cas où les longueurs sont quelconques (positives ou négatives)

Algorithme 9 : permettant de trouver le plus court chemin entre deux sommet S_{deb} et S_{fin}

Entrée: G=(X;U) un graphe valué, **Sortie:** plus court chemin

Début

1. ***Initialisation***

   $\lambda^0(s_1) = 0$ ***pour tout*** $s_i \neq s_1$ ***faire*** $\lambda^0(s_i) = \infty$

   FinPour

   $k = 1$

2. ***à l'itération k***

   Faire $\lambda^k(s_1) = 0$ *et*

   pour tout $s_i \neq s_1$ ***Faire***

   $$\lambda^k(s_i) = Min\left(\lambda^{k-1}(s_i),\ Min_{s_j \in \Gamma^{-1}(s_i)}\left(\lambda^{k-1}(s_j) + M(s_j, s_i)\right)\right)$$

   FinPour

3. ***Si*** $k \leq n - 1$ ***aller*** *en 2 avec* $k \leftarrow k + 1$

   Si $\lambda^k(s_i) = \lambda^{k-1}(s_i)$ ***pour*** *tout i* ***alors*** *FIN*

   Si $k = n$ ***alors*** *il existe un circuit absorbant*

Fin

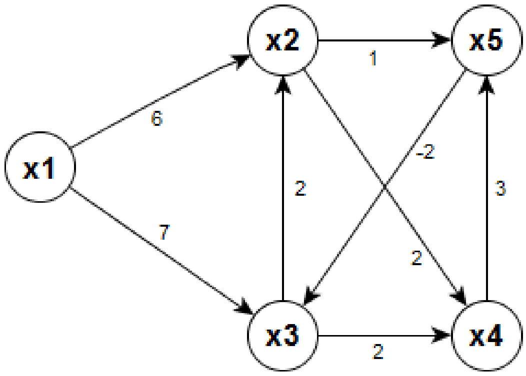
Remarques :

- Dans les graphes pondérés, le poids d'un circuit est la somme des poids des arcs qu'il contient. Si ce poids est négatif, on parle de circuit absorbant.
  si dans le graphe il existe un circuit de longueur négative, la recherche d'un plus court chemin est sans objet. On peut utiliser le circuit une infinité de fois.
  Exemple : $S_{deb}=x_1$ et $S_{fin}=x_5$

Chapitre 4 : Problème du plus court chemin

M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	6	7	∞	∞
x_2	∞	0	∞	2	1
x_3	∞	2	0	2	∞
x_4	∞	∞	∞	0	3
x_5	∞	∞	-2	∞	0

	Les prédécesseurs $\Gamma^{-1}(s_i)$
$s_i = x_1$	$\{\}$
$s_i = x_2$	$\{x_1, x_3\}$
$s_i = x_3$	$\{x_1, x_5\}$
$s_i = x_4$	$\{x_2, x_3\}$
$s_i = x_5$	$\{x_2, x_4\}$



	K	$\lambda^k(x_1)$	$\lambda^k(x_2)$	$\lambda^k(x_3)$	$\lambda^k(x_4)$	$\lambda^k(x_5)$
Initialisation	1	0	∞	∞	∞	∞

à l'itération 2 : $\lambda^2(x_1) = 0$ et

$$\lambda^k(s_i) = Min\left(\lambda^{k-1}(s_i),\ Min_{s_j \in \Gamma^{-1}(s_i)}\left(\lambda^{k-1}(s_j) + M(s_j, s_i)\right)\right)$$

- $\lambda^2(x_2) = Min\left(\lambda^1(x_2),\ Min_{s_j \in \{x1,\ x3\}}\left(\lambda^1(s_j) + M(s_j, x_2)\right)\right)$

$$= Min\left(\infty, Min(\lambda^1(x_1) + M(x_1, x_2), \lambda^1(x_3) + M(x_3, x_2))\right)$$
$$= Min\left(\infty, Min(0 + 6, \infty + 2)\right) = 6$$

- $\lambda^2(x_3) = Min\left(\lambda^1(x_3),\ Min_{s_j \in \{x1, x5\}}\left(\lambda^1(s_j) + M(s_j, x_3)\right)\right)$

$$= Min\left(\infty, Min(\lambda^1(x_1) + M(x_1, x_3), \lambda^1(x_5) + M(x_5, x_3))\right)$$
$$= Min\left(\infty, Min(0 + 7, \infty - 2)\right) = 7$$

- $\lambda^2(x_4) = Min\left(\lambda^1(x_4),\ Min_{s_j \in \{x2, x3\}}\left(\lambda^1(s_j) + M(s_j, x_4)\right)\right)$

$$= Min\left(\infty, Min(\lambda^1(x_2) + M(x_2, x_4), \lambda^1(x_3) + M(x_3, x_4))\right)$$
$$= Min\left(\infty, Min(6 + 2, 7 + 2)\right) = 8$$

- $\lambda^2(x_5) = Min\left(\lambda^1(x_5),\ Min_{s_j \in \{x2, x4\}}\left(\lambda^1(s_j) + M(s_j, x_5)\right)\right)$

$$= Min\left(\infty, Min(\lambda^1(x_2) + M(x_2, x_5), \lambda^1(x_4) + M(x_4, x_5))\right)$$
$$= Min\left(\infty, Min(6 + 1, 8 + 3)\right) = 7$$

	K	$\lambda^k(x_1)$	$\lambda^k(x_2)$	$\lambda^k(x_3)$	$\lambda^k(x_4)$	$\lambda^k(x_5)$
Initialisation	1	0	∞	∞	∞	∞
Itération 2	2	0	6	7	7	8

Le résultat final est :

	K	$\lambda^k(x_1)$	$\lambda^k(x_2)$	$\lambda^k(x_3)$	$\lambda^k(x_4)$	$\lambda^k(x_5)$
Initialisation	1	0	∞	∞	∞	∞
Itération 2	2	0	6	7	8	7
Itération 3	3	0	6	5	7	7
Itération 4	4	0	6	5	7	7