Corrigé de la Série de TD N°03

Corrigé Questions :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\overline{A}\,.\ B + A\,.B = B.\overline{A}\ + B.A$	**Commutativité de « . »**
$B.\overline{A}\ + B.A =\ B.(\overline{A} +\ A)$	**Distributivité de « . » par rapport à « + »**
$B.(\overline{A} +\ A) =\ B.1$	**Complémentarité de « + »**
$B.1 = B$	**Elément neutre de « . »**

Transformation algébrique	Lois utilisées
$(A \oplus B)\,.B + A.B =$ $(\overline{A}.B + A.\overline{B})\,.B + A.B$	Définition du $\oplus$ (ou exclusif)
$= B.(B.\overline{A} + \overline{B}.A) + A.B$	Commutativité de « . »
$= B.(B.\overline{A}) + B.(\overline{B}.A) + A.B$	Distributivité de « . » par rapport à « + »
$= (B.B).\overline{A} + (B.\overline{B}).A + A.B$	Associativité de « . »
$= B.\overline{A} + (B.\overline{B}).A + A.B$	Idempotence de « . »
$= B.\overline{A} + 0.A + A.B$	Complémentarité
$= B.\overline{A} + 0 + A.B$	Absorption
$= B.\overline{A} + A.B$	Elément neutre de « + »
$= B.(\overline{A} + A)$	Distributivité de « . » par rapport à « + »
$= B.1$	Complémentarité
$= B$	Elément neutre de « . »

Transformation algébrique	Lois utilisées
$x + (\overline{x}.y) = (x + \overline{x}).(x + y)$	Distributivité de « + » par rapport à « . »
$= 1.(x + y)$	Complémentarité de « + »
$= x + y$	Elément neutre de « . »

Corrié exercice1

Soient x et y deux variables booléennes $(x,y)\in V^2$ où $V=\{0,1\}$

1 - On définit l'opérateur $\oplus$ de la manière suivante :

$x\oplus y = 1$ si et seulement si $x\neq y$ **,**Montrez, à l'aide d'une table de vérité que **:**

$$x \oplus y \;=\; \bar{x}.y + x.\bar{y}$$

2- On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante :

$x\overline{\oplus}y = 1$ si et seulement si $x=y$ **,**Montrez, à l'aide d'une table de vérité que **:**

$$x \,\overline{\oplus}\, y \;=\; \overline{x \oplus y}$$

Réponse : 1-

Égalité

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}.y$	$x.\bar{y}$	$\bar{x}.y+x.\bar{y}$	$x\oplus y$
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0

Réponse : 2-

Égalité

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x\oplus y$	$\overline{x\oplus y}$	$x\,\overline{\oplus}\,y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1

Valeurs trouvées par définition :
$x\overline{\oplus}y = 1$ si et seulement si $x=y$

Corrigé exercice2 :

- Appliquez cette loi sur 2 variables $\boldsymbol{x_2}$ et $\boldsymbol{x_1}$.

$$\overline{x_2.x_1} = \overline{x_2} + \overline{x_1}$$
$$\overline{x_2 + x_1} = \overline{x_2}.\overline{x_1}$$

- Appliquez cette loi sur 3 variables $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_2}$ et $\boldsymbol{x_1}$.

$$\overline{x_3.x_2.x_1} = \overline{x_3} + \overline{x_2} + \overline{x_1}$$
$$\overline{x_3 + x_2 + x_1} = \overline{x_3}.\overline{x_2}.\overline{x_1}$$

x2	x2	$x_2.x_1$	$\overline{x_2.x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}+\overline{x_1}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Egalité

- Appliquez cette loi sur $\boldsymbol{n}$ variables $\boldsymbol{x_n}$, …, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_1}$.

$$\overline{x_{n-1}\ldots x_2.x_1} = \overline{x_n} + \overline{x_2} + \overline{x_1}$$
$$\overline{x_{n-1}+\ldots x_2 + x_1} = \overline{x_n}.\overline{x_2}\ldots.\overline{x_1}$$

Corrigé Exercice 3 : Corrigé A- Ce qui donne la table de vérité suivante :

$$f_1(x,y,z) \;=\; x.y.(z+\bar{z}) + x.\bar{y}.(z+\bar{z}) + (x+\bar{x}).y.z$$

$$f_1(x,y,z) \;=\; x.y.z + x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.y.z + \bar{x}.y.z$$

$$f_1(x,y,z) \;= m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_7 + m_3$$

$$f_1(x,y,z) \;= m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

mintermes	x, y, z	$f_1(x,y,z)$
m_0	000	0
m_1	001	0
m_2	010	0
m_3	011	1
m_4	100	1
m_5	101	1
m_6	110	1
m_7	111	1

Corrigé B :

NAND : $x \uparrow y = \overline{x.y}$

$f_2(x,y,z) = x.y + y.\bar{z}$

$= \overline{\overline{x.y + y.\bar{z}}} = \overline{\overline{x.y}.\overline{y.\overline{z.z}}}$

$= (x \uparrow y) \uparrow \left(y \uparrow (z \uparrow z)\right)$

NOR : $x \downarrow y = \overline{x+y}$

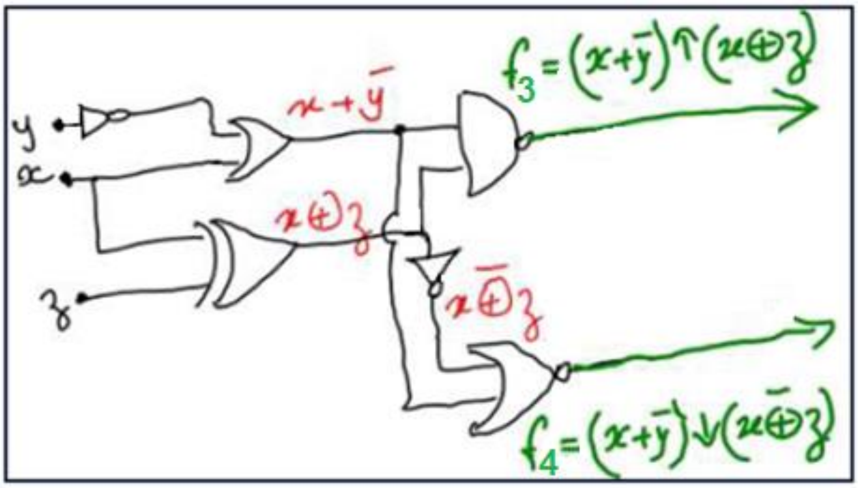
$f_2(x,y,z) = x.y + y.\bar{z}$

$= y.(x+\bar{z}) = \overline{\overline{y.(x+\bar{z})}}$

$= \overline{\overline{\bar{y}+\bar{y}} + \overline{(x+\overline{z+z})}}$

$= (y \downarrow y) \downarrow \left(x \downarrow (z \downarrow z)\right)$

Corrigé C :



Corrigé D :

$\overline{A + \overline{B}.C} = \overline{A}.\left(\overline{\overline{B}.C}\right)$	DeMorgan
$= \overline{A}.(B+\overline{C})$	DeMorgan
$= \overline{A}.B + \overline{A}.\overline{C}$	Distributivité
$= \overline{A}.B.(1) + \overline{A}.\overline{C}.(1)$	Elément neutre
$= \overline{A}.B.(C+\overline{C}) + \overline{A}.\overline{C}.(B+\overline{B})$	Complémentarité
$= \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{C}.B + \overline{A}.\overline{C}.\overline{B}$	Distributivité
$= \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	Commutativité
$= \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	Idempotence

Corrigé E :

$S_1 = (A \oplus B) \oplus C_{in}$

$C_{out} = (A \oplus B).C_{in} + A.B$

$S_2 = \left(x \oplus (x \oplus 0)\right) \cdot \left([(x \oplus 0) \oplus y] \oplus y\right)$

Corrigé exercice 4 :

1. **Représentation Canonique**

1.1. 2ème forme

- ✓ **F (A, B, C, D)** $=(A+B+\bar{D})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+D)$
- ✓ **F (A, B, C, D)** $=(A+B+\bar{C}C+\bar{D})(\bar{A}+B+C+\bar{D}D)(\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D}D)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}C+D)$
- ✓ **F (A, B, C, D)** $=(A+B+C+\bar{D})*(A+B+\bar{C}+\bar{D})*(\bar{A}+B+C+D)*$
  $(\bar{A}+B+C+\bar{D})*(\bar{A}+B+\bar{C}+D)*(\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D})*(\bar{A}+\bar{B}+C+D)*(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+D)$
- ✓ **F (A, B, C, D)**$=\prod(1, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 14)$

1.2. 1ère Forme

- ✓ **F (A, B, C, D)**$=\sum(0, 2, 4, 5, 6, 7, 13, 15)$
- ✓ **F (A, B, C, D)**$=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}BCD+AB\bar{C}D+ABCD$

2. **Simplification**

Méthode Algébrique

- ✓ **F (A, B, C, D)** $=(A+B+\bar{D})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+D)$
- ✓ **F (A, B, C, D)** $=(A+B+\bar{D})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B}+D)=(A+B+\bar{D})(\bar{A}+B)(\bar{A}+D)$
- ✓ **F (A, B, C, D)=** $(B+\bar{D})(\bar{A}+B)(\bar{A}+D)=(B+\bar{D})(\bar{A}+D)$

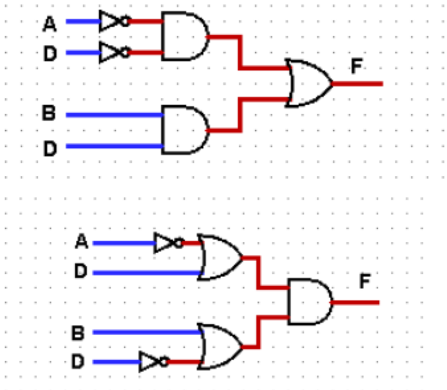
Méthode KARNAUGH

	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

F(A, B, C, D)= $(B+\bar{D})(\bar{A}+D)$ **1.5 pt**

F(A, B, C, D)=$\bar{A}\bar{D}+BD$

3. **Le Circuit (Logigramme)**



4.3. V en Fonction de NOR (↓)

V(A, B, C, D)= $(B+\bar{D})(\bar{A}+D)=\overline{\overline{(B+\bar{D})(\bar{A}+D)}}=\overline{\overline{(B+\bar{D})}+\overline{(\bar{A}+D)}}=$
$\overline{(B\downarrow\bar{D})+(\bar{A}\downarrow D)}=(B\downarrow(D\downarrow D))\downarrow(\bar{A}\downarrow D)=(B\downarrow(D\downarrow D))\downarrow((A\downarrow A)\downarrow D)$

4.4. V en Fonction de NAND (↑)

V(A, B, C, D)= $(B+\bar{D})(\bar{A}+D)=\bar{A}B+\bar{A}\bar{D}+BD=\ \bar{A}\bar{D}+BD=\dots$

V(A, B, C, D)=$((A\uparrow A)\uparrow(D\uparrow D))\uparrow(B\uparrow D)$

Corrigé exercice 5

1. $F_1(A;B;C) = A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$

   Correction : *La table de Karnaugh est présentée par la figure suivante:*

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\overline{C}$
A	1	1	0	1
$\overline{A}$	0	0	0	0

Expression simplifiée : $F_1(A;B;C) = A.B + A.C.$

2. $F_2(A;B;C) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B} + A.B.C$

   Correction : *La table de Karnaugh est présentée par la figure suivante:*

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\overline{C}$
A	1	1	1	0
$\overline{A}$	0	0	1	0

Expression simplifiée : $F_2(A;B;C) = A.C + \overline{B}.\overline{C}$

(c) $F3(A;B;C) = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C$

Correction :

$F_3(A;B;C) = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C =$

$= \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C$

La table de Karnaugh est la suivante.

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\overline{C}$
A	0	1	1	0
$\overline{A}$	0	1	1	1

Expression simplifiée : $F3(A;B;C) = \overline{B} + \overline{A}.\overline{C}$

(d) $F_4(A;B;C;D) = B.\overline{C}.\overline{D}+\overline{A}.B.\overline{D}+A.B.C.\overline{D}$

$= A.B.\overline{C}.\overline{D}+\overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.C.\overline{D}+\overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D}+A.B.C.\overline{D}$

La table de Karnaugh est présentée figure suivante

$AB \backslash CD$	CD	$\overline{C}D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\overline{D}$
AB	0	0	1	1
$\overline{A}B$	0	0	1	1
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
$A\overline{B}$	0	0	0	0

Expression simplifiée : $F_4(A;B;C;D) = B.\overline{D}$

(e) $F5(A;B;C;D) = \overline{A}+A.B+A.\overline{B}.C+A.\overline{B}.C.D$

Correction :

$F5(A;B;C;D) = \overline{A}.\ B.C.D + \overline{A}.\ B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\ B.\overline{C}.D + \overline{A}.\ B.C.\overline{D} + \overline{A}.\ \overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.\ \overline{B}.C.\overline{D} +$
$\overline{A}.\ \overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.C.D +$
$A.B.C.D+ A.B.C.\overline{D} + A.B.\overline{C}.D + A.B\ .\overline{C}.\overline{D} +$
$A.\overline{B}.C.D+A.\overline{B}.C.\overline{D}+ A.\overline{B}.C.D$

La table de Karnaugh est présentée par la figure suivante:

$AB \backslash CD$	CD	$\overline{C}D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\overline{D}$
AB	1	1	1	1
$\overline{A}B$	1	1	1	1
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1	1	1
$A\overline{B}$	1	0	0	1

Expression simplifiée : $F5(A;B;C;D) = B+\overline{A}+C$

(f) $F_6(A;B;C;D) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{D}+\overline{A}.\overline{C}.\overline{D}+\overline{A}.B.C.\overline{D}+A.B.D+\overline{B}.C.D+A.\overline{B}.C.\overline{D}$

Correction :

$F_6(A;B;C;D) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{D}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{D}.\overline{C} +\overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} +\overline{A}.B.C.\overline{D} + A.B.C.D + A.B.\overline{C}.D +$
$A.\overline{B}.C.D+ \overline{A}.\overline{B}.C.D + A.\overline{B}.C.\overline{D}$

La table de Karnaugh est présentée par la figure suivante

$AB \backslash CD$	CD	$\overline{C}D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\overline{D}$
AB	1	1	0	0
$\overline{A}B$	0	0	1	1
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	1	1
$A\overline{B}$	0	0	1	1

Expression simplifiée : $F_6(A;B;C;D) = \overline{A}.\overline{D}+A.B.D+\overline{B}.D$

Corrigé d'exercices supplémentaires:

A) Commande de Lampes :

1. Définition des entrées- sorties :

On a :

Trois entrées a, b, c, et deux sorties R et S

2. Table de vérité :

c	b	a	R	S
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

3. Equations et simplifications :

R = *c*. *b*.a + c.b.a + *c*. b. *a* +*c*.b.a + c. *b*. *a* + c.*b*.a + c.b.*a* ou bien : **R= c+b+a**

on utilisant la deuxième forme normale

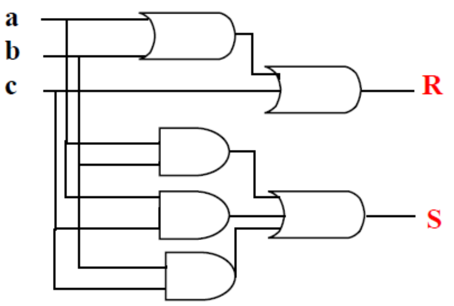
S=*c*.b.a+c.*b*.a+c.b.*a*+c.b.a.

on utilisant la table de Karnaugh pour simplifier l'expression:

ba \ *c*	ba	$\bar{b}$a	$\bar{b}\bar{a}$	b$\bar{a}$
$\bar{c}$	1	0	0	0
c	1	1	0	1

L'expression simplifiée *:* **S = b.a + c.a + c.b**

Le logigramme



B) Fonctionnement d'un pont :

1. Définition des entrées- sorties :

On a :

deux entrées x, y et deux sorties A et B

x=0 si a+b <= 7 tonnes

x=1 si a+b >= 7 tonnes

y=0 si a>b

y=1 si a<=b

2. Table de vérité :

x	y	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	0

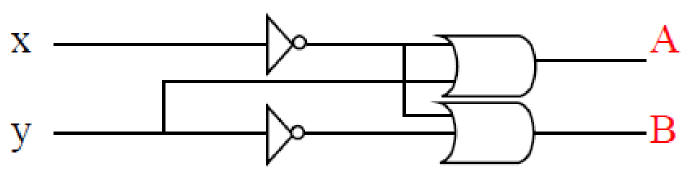
3. Equations et simplifications :

On utilisant la deuxième forme normale (puisqu'on n'en a qu'un seul max terme pour les deux sorties) :

A= $\boldsymbol{x}$ + y

B= $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$

Le logigramme



Corrigé Exercice sup :

1. Simplifier les expressions suivantes en utilisant les tables de kamaugh à 5 variables.

$$F(A, B, C, D, E) = \sum (0, 1, 2, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 24, 26, 27, 30, 31)$$
$$= \overline{C}.\overline{E} + A.B.D + \overline{B}.\overline{D}.\overline{E} + \overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{E}$$
$$F(A, B, C, D, E) = \sum (0, 1, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 17, 20, 21, 24, 26, 28, 29, 30, 31)$$
$$= \overline{B}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{C}.\overline{D} + B.\overline{C}.\overline{E} + A.B.C$$
$$F(A, B, C, D, E) = \sum (0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 26, 28, 29, 30)$$
$$= \overline{C}.\overline{D} + B.\overline{E} + \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{D} + A.B.\overline{D}$$

2. Simplifier les expressions suivantes en utilisant les tables de kamaugh à 6 variables.

$$F(A, B, C, D, E, F) = \sum (2, 3, 9, 13, 16, 18, 24, 25, 29, 34, 37, 41, 45, 48, 50, 53, 56, 57, 61)$$
$$= C.\overline{E}.F + B.\overline{D}.\overline{E}.\overline{F} + A.D.\overline{E}.F + \overline{C}.\overline{D}.E.\overline{F} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}.E$$
$$F(A, B, C, D, E, F) = \sum (0, 1, 2, 3, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 24, 25, 29, 32, 33, 34, 36, 37, 41,$$
$$45, 48, 49, 50, 51, 53, 55, 57, 61)$$
$$= \overline{C}.\overline{D}.\overline{F} + C.\overline{E}.F + A.B.\overline{C}.F + \overline{A}.\overline{B}.\overline{D}.F + A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{E} + \overline{A}.B.\overline{D}.\overline{E}$$