Série de TD 3 L'algèbre de Boole

Questions : Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\overline{A}\,.\,B + A\,.\,B = B.\overline{A} + B.A$	....
$B.\overline{A} + B.A = B.(\overline{A} + A)$	....
$B.(\overline{A} + A) = B.1$	....
$B.1 = B$	....

Transformation algébrique	Lois utilisées
$(A \oplus B)\,.\,B + A.B =$ $(\overline{A}.B + A.\overline{B})\,.\,B + A.B$	
$= B.(B.\overline{A} + \overline{B}.A) + A.B$	
$= B.(B.\overline{A}) + B.(\overline{B}.A) + A.B$	
$= (B.B).\overline{A} + (B.\overline{B}).A + A.B$	
$= B.\overline{A} + (B.\overline{B}).A + A.B$	
$= B.\overline{A} + 0.A + A.B$	
$= B.\overline{A} + 0 + A.B$	
$= B.\overline{A} + A.B$	
$= B.(\overline{A} + A)$	
$= B.1$	
$= B$	

Transformation algébrique	Lois utilisées
$x + (\overline{x}.y) = (x + \overline{x}).(x + y)$	
$= 1.(x + y)$	
$= x + y$	

Exercice 1 :

Soient x et y deux variables booléennes $(x, y) \in V^2$ **où** $V = \{0,1\}$

1- On définit l'opérateur « $\oplus$ » de la manière suivante : $x \oplus y = 1$ **si et seulement si** $x \neq y$

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que

$$x \oplus y = \bar{x}.\, y + x.\, y$$

2- On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante : $x \overline{\oplus} y = 1$ **si et seulement si** $x = y$

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que : $x \overline{\oplus} y = \overline{x \oplus y}$

Exercice 2 : – La loi de ***Morgan*** stipule que : <u>la négation d'une somme</u> logique est égale au <u>produit des négations</u>, **<u>et</u>** <u>la négation d'un produit</u> logique est égale à la <u>somme des négations</u>:

- Appliquez cette loi sur 2 variables ***x2*** et ***x1***.
- Appliquez cette loi sur 3 variables ***x3, x2*** et ***x1***.
- Appliquez cette loi sur ***n*** variables ***xn,*** …, ***x2***, ***x1***.
- En vous servant d'une table de vérité, démontrer cette loi pour 2 variables ***x1*** et ***x2***.

Exercice 3 : Soit les fonctions suivantes :

A- Donnez la table de vérité des fonctions : $f_1(x, y, z) = x.y + x.\bar{y} + y.z$

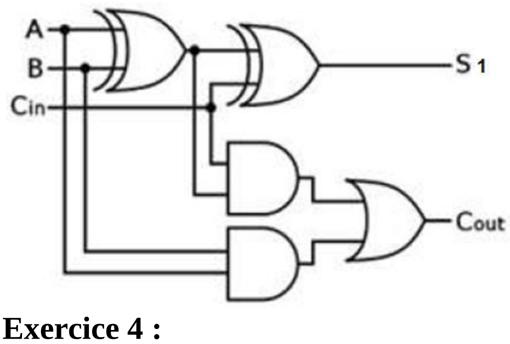
Indication : Vous devez d'abord exprimer $f_1(x, y, z)$ sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

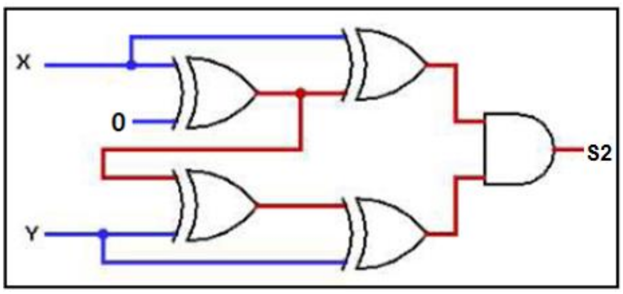
B- Exprimez la fonction $f_2(x, y, z) = x.y + y.\bar{z}$ à base uniquement de l'opérateur NAND. Ensuite exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR.

C- Donnez le logigramme des fonctions suivantes : $f_3 = (x + \bar{y}) \uparrow (x \oplus z)$
$f_4 = (x + \bar{y}) \downarrow (x \overline{\oplus} z)$

D- Trouvez le complément de : $A + \bar{B}.C$ ensuite donner et le résultat qui doit être composé uniquement de Mintermes.

E- Donnez les équations de sorite des circuits ci-dessous :





Exercice 4 :

Soit la fonction **F (A, B, C, D)** $=(A+B+\bar{D})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+D)$

1. Déduire les deux formes canoniques de la fonction **F** sous forme numérique et alphabétique.

2. Simplifier la fonction **F.**

3. Dessiner le circuit (logigramme) de la fonction **F.**

4. Exprimer la fonction F :

   4.1. En utilisant seulement l'opérateur **Non-OU** (↓)

   4.2. En utilisant seulement l'opérateur **Non-ET** (↑)

Exercice 5 :

Considérer les fonctions logiques suivantes. Pour chacune d'elles,
1. construire la table de Karnaugh ;
2. utiliser la table pour simplifier les expressions.

$$F_1(A,B,C) = A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C$$

$$F_2(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B} + A\cdot B\cdot C$$

$$F_3(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + \overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot C$$

$$F_4(A,B,C,D) = B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$

$$F_5(A,B,C,D) = \overline{A} + A\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$$

$$F_6(A,B,C,D) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot D + \overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$$

Exercices supplémentaires: Conception de circuits logiques simples :

A) Commande de Lampes :

Trois interrupteurs a, b, c commandent l'allumage de 2 lampes R et S suivant les conditions suivantes :

- Dès qu'un ou plusieurs interrupteurs sont activés, la lampe R doit s'allumer.
- La lampe S ne doit s'allumer que si au moins 2 interrupteurs sont activés.

Questions :

a) Calculer la table de vérité associée à ce problème.

b) Exprimer R et S en fonction de a, b, c

c) Réaliser le logigramme à l'aide de portes ET, OU NON.

B) Fonctionnement d'un pont :

Un pont peut soutenir 7 tonnes au maximum, on doit alors surveiller le poids des véhicules se présentant aux deux extrémités A et B où deux bascules mesurent le poids respectifs a et b des véhicules. On suppose que chaque véhicule a un poids inférieur à 7 tonnes.
Le fonctionnement est alors le suivant :

- Si un seul véhicule se présente, la barrière (A ou B) s'ouvre ;
- Si a+b <= 7 tonnes, les barrières A et B s'ouvrent ;
- Si a+b > 7 tonnes, la barrière correspondant au véhicule le plus léger s'ouvre,
- Si a=b la barrière A s'ouvre en priorité.

a et b n'étant pas des variables binaires, il convient de créer 2 variables binaires x et y, et de reformuler l'énoncé du problème.

Questions :

a) Chercher alors les équations de A et B, en fonction de x et y,

b) en donner le schéma en utilisant des portes ET, OU, NON.

Exercice :

1. Simplifier les expressions suivantes en utilisant les tables de karnaugh à 5 variables.

$$F(A,B,C,D,E) = \sum(0,1,2,4,8,10,12,14,16,17,18,20,24,26,27,30,31)$$

$$F(A,B,C,D,E) = \sum(0,1,4,5,8,9,10,16,17,20,21,24,26,28,29,30,31)$$

$$F(A,B,C,D,E) = \sum(0,1,2,3,4,5,8,9,10,12,14,16,17,18,19,24,25,26,28,29,30)$$

2. Simplifier les expressions suivantes en utilisant les tables de karnaugh à 6 variables.

$$F(A,B,C,D,E,F) = \sum(2,3,9,13,16,18,24,25,29,34,37,41,45,48,50,53,56,57,61)$$

$$F(A,B,C,D,E,F) = \sum(0,1,2,3,9,11,13,16,17,18,24,25,29,32,33,34,36,37,41,\\ 45,48,49,50,51,53,55,57,61)$$