Chapitre IV

EQUATION DE LAPLACE

4.1 L'équation de Laplace

Une équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$ est sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_n} = 0.$$

On note Δu le premier nombre, ainsi l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^2$ est

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

dans $\mathbb{R}^3$ c'est l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

La quantité Δu s'appelle le laplacien de u.

Exemple 63 *La température T d'une plaque, sans source de chaleur, dont les points sont repérés par les coordonnées y est à l'instante t une solution de*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Lorsque le temps t s'écoule la température de la plaque se rapproche d'une température d'équilibre que vérifie : $\Delta T = 0$

Définition 64 *Une fonction u qui vérifie $\Delta u = 0$ dans un ouvert G de $\mathbb{R}^n$ s'appelle une fonction harmonique dans G.*

Exemple 65 *Soit $A = (a_1, ..., a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ et r distance de A au point M de coordonnés $x_1, ..., x_n$ définir par :*

$$r^2 = (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2$$

Les fonctions harmoniques de la forme $u(x_1, ..., x_n) = f(r)$ Jouent un rôle important.

Théorème 66 *Une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$ qui ne dépend que de r est de la forme*

$$f(r) = a \ln r + b$$

une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^n, n > 2$ qui ne dépend que de r est de la forme

$$f(r) = ar^{2-n} + b$$

ces fonctions sont harmoniques dans tout ouvert ne contenant pas le point A.

Preuve. On vérifie immédiatement que $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - a_i}{r}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x_i-a_i)^2}{r^3}$, or $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i}$ donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''(r) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + f'(r) \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}$$

ainsi

$$\Delta u = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = \frac{1}{n-1} \left(r^{n-1} f'(r)\right)'$$

de sorte que $u = f(r)$ est harmonique si $r^{n-1} f'(r)$ est constante ce qui assure le résultat .

On constate que pour $n = 3$ le potentiel d'une charge placée au point A est proportionnel à $\frac{1}{r}$, Pour $n = 2$ il est proportionnel à $\ln r$. ■

Exemple 67 *Pour $n = 2$, $\ln(x^2 + y^2)$ est harmonique hors de l'origine.*

Soit $\ln z$ une détermination du logarithme du nombre complexe z.

$$\ln z = \left(\ln(x^2 + y^2)\right)^{1/2} + i \arg z$$

On a $\arg z$ *est harmonique hors de l'origine car :*

Soit $u(r,\theta)$ *une fonction de* r *et* θ *On vérifie facilement que :*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Nous choisissons $\theta \in [0, 2\pi[$ et $u = \theta$

u est l'argument de $z = r\exp i\theta$, il est clair que $\Delta u = 0$, donc que $\arg z$ est harmonique hors l'origine

Donc $\ln z$ est harmonique .

Théorème 68 (théorème de la moyenne) 1. *Soit* u *une fonction harmonique dans un ouvert* D *de* $\mathbb{R}^2$ *contenant le disque de rayon* R *centre au point* M *de coordonnées* (x_0, y_0) *Alors* $\forall \rho < R$:

$$u(x_0, y_0) = u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)\, d\theta$$

2. *Soit* u *une fonction harmonique dans un ouvert* D *de* $\mathbb{R}^3$*contenant la boule de rayon* R *centrée au point* M_0*, de coordonnées* (x_0, y_0, z_0) *alors* $\forall \rho < R$:

$$u(x_0, y_0, z_0) = u(M_0) = \frac{1}{2\pi\rho^2}\int\int_{S_\rho} u(x, y, z)\, d\sigma \qquad (1)$$

S_p étant la sphère de rayon ρ *Centrée en* M_0.

Cette formmule peut aussi s'écrire en passant en coordonnées sphériques :

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(x_0 + \rho\sin\theta\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\, d\theta.$$

On dit que u *a la propriété de la moyenne dans* D.

4.2 Problème de Dirichlet relatif à un disque

Définition 69 *Soit* D *un ouvert de frontière* ∂D *et* f *une fonction définie sur* ∂D. *Une fonction* u *harmonique dans* D *telle que :*

$$\forall p \in \partial D \lim_{M \to p, M \in D} u(M) = f(p)$$

S'appelle une solution au problème de Dirichlet dans D *relatif à* f.

Remarque 70 *Ce problème correspond, par exemple à la recherche de la température d'équilibre dans D d'un corps de frontière ∂D ne contenant ni source ni puits de chaleur et température donne $f(p)$*

Définition 71 *Soit D un ouvert borne un problème de Dirichlet dans D s'appelle un problème de Dirichlet intérieur .*

Un problème de Dirichlet dans le complémentaire de D s'appelle un problème de Dirichlet extérieur.

Théorème 72 *Soit D un ouvert borné.*

1) le problème de Dirichlet dans D relatif à une fonction f admet au plus une solution

2) le problème de Dirichlet dans D est un problème bien posé (ou stable) au sens suivant : si $|f_n - f| \leq \varepsilon$ Sur ∂D alors : $|u_n - u| \leq \varepsilon$ dans D.

4.2.1 Donnée frontière de classe $\mathbf{C}^2$

On notera D le disque $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R_0^2$ de centre $M_0(x_0, y_0)$ et de rayon R_0, un point de ce disque a pour coordonnées $x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi$ avec $0 \leq r < R_0$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Un point de la frontière de D a pour coordonnées $x_0 + R_0\cos\varphi, y_0 + R_0\sin\varphi$. Un tel point sera note $M(\varphi)$

Soit f une fonction à valeur réelle de période 2π de classe C^2, On cherche une fonction u harmonique dans D telle que :

$$\lim_{p \to M(\varphi), p \in D} u(p) = f(\varphi).$$

D'après le théorème précédent ce problème a au plus une solution .

L'expression du laplacien en coordonnées polaires est :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Nous chercherons u de classe C^2 des deux variables r et φ

définie pour $0 \leq r < R_0$ et telle que $u(R_0, \varphi) = f(\varphi)$

En utilisant la méthode de séparation des variables

Soit $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

$\Delta u = 0$, si et seulement si

$$r^2 \frac{R"\left(r\right)}{R\left(r\right)} + r\frac{R'\left(r\right)}{R\left(r\right)} + \frac{\Phi"\left(\varphi\right)}{\Phi\left(\varphi\right)} = 0$$

donc il existe une constante k telle que :

$$r^2 \frac{R"\left(r\right)}{R\left(r\right)} + r\frac{R'\left(r\right)}{R\left(r\right)} = k = -\frac{\Phi"\left(\varphi\right)}{\Phi\left(\varphi\right)}$$

Le problème de Strum-Liouville correspondant est

$$\Phi"\left(\varphi\right) + k\Phi\left(\varphi\right) = 0$$

Ses solutions sont : $\Phi_n\left(\varphi\right) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi, k = n^2 \quad n \in \mathbb{N}$.

$R\left(r\right)$ doit alors être solution de l'équation d'Euler :

$$r^2 R"\left(r\right) + rR'\left(r\right) - n^2 R\left(r\right) = 0$$

pour $n = 0$ les solution est

$$R\left(r\right) = C + D\ln r$$

pour $n \neq o$, ce sont

$$R_n\left(r\right) = Cr^n + Dr^{-n}$$

comme u doit être continue dans le disque il faut $D = 0$.

Ainsi

$$\Phi_n\left(\varphi\right) R_n\left(r\right) = Cr^n\left(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right).$$

Alors

$$u(r, \varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n\left(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi\right).$$

Avec $u(R_0,\varphi)=f\left(\varphi\right),$

donc

$$f\left(\varphi\right)=a_0+\sum_{n\geq 1} r^n\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)$$

- Le développement en série de fourier de f, il faut que $\alpha_0=a_0$et $\alpha_n R_0^n=a_n$ $n>0,\beta_n R_0^n=b_n$ et donc

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\theta\right)d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{R_0}\right)^n\int_0^{2\pi}f\left(\theta\right)\left(\cos\theta n\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi\right)d\theta$$

On trouve :

$$\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{R_0}\right)^n 2\cos n(\theta-\varphi)\right)f\left(\theta\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{R_0}\right)^n\left(\exp in(\theta-\varphi)+\exp -in(\theta-\varphi)\right)\right)f\left(\theta\right)d\theta
\end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{R_0}\right)^n\exp in(\theta-\varphi) &= \frac{r\exp i(\theta-\varphi)}{R_0-r\exp i(\theta-\varphi)}\\
\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{R_0}\right)^n\exp -in(\theta-\varphi) &= \frac{r\exp -i(\theta-\varphi)}{R_0-r\exp -i(\theta-\varphi)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$1+\frac{r\exp i(\theta-\varphi)}{R_0-r\exp i(\theta-\varphi)}+\frac{r\exp -i(\theta-\varphi)}{R_0-r\exp -i(\theta-\varphi)}=\frac{{R_0}^2-r^2}{{R_0}^2-2rR_0\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

Ainsi

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{{R_0}^2-r^2}{{R_0}^2-2rR_0\cos(\theta-\varphi)+r^2}f\left(\theta\right)d\theta$$

On suppose $x_0=y_0=0$, donc

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{{R_0}^2-(x^2+y^2)}{{R_0}^2-2R_0(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2}f\left(\theta\right)d\theta$$

ou

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}(\frac{R_0\exp i\theta+z}{R_0\exp i\theta-z}f\left(\theta\right)d\theta$$

4.2.2 Noyau de Poisson

Définition 73 *On appelle noyau de Poisson relatif au disque D de centre 0 et de rayon R la fonction harmonique dans D définis par :*

$$\begin{aligned} p_\theta(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\frac{R^2-(x^2+y^2)}{R^2-2R(x\cos\theta+y\sin\theta)+x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}(\frac{R_0\exp i\theta+z}{R_0\exp i\theta-z} \end{aligned}$$

Remarque 74 *$p_\theta(x,y)$ est harmonique dans D pour toute valeur de θ*

$p_\theta(x,y)>0,\forall\theta,\forall x,y$ tels que $x^2+y^2<R^2$

Notation 75 *Si on a $z=x+iy$, on obtient*

$$p_\theta(z)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}(\frac{R_0\exp i\theta+z}{R_0\exp i\theta-z}.$$

Théorème 76 *Soit f une fonction continue sur $[0,2\pi]$ telle que $f(0)=f\left(2\pi\right)$.*

Soit D le disque $x^2+y^2<R^2$ et γ sa frontière, il existe une seule fonction u telle que :

1) u est harmonique dans D.

2) $\lim\limits_{z\to\operatorname{Re}\exp i\theta} u(z)=f(\theta)$.

Cette fonction est

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\theta(x,y)f\left(\theta\right)d\theta.$$