مشاكل النقل

1. مفهوم مشكلة النقل:

تهدف مشكلة النقل لتحديد عدد الوحدات المنقولة من أيّة بضاعة من مصادر عرضها إلى الأماكن التي تطلبها، بحيث تكون قيمة تكلفة النقل أقل ما يُمكن في حالة كان الهدف هو التقليل، أو تكون قيمة الربح أو العائد المتحقق من عملية النقل في أقصى حده في حالة كان الهدف هو التعظيم. ويُعتمد على مسائل النقل في حل العديد من المشاكل الإقتصادية، وفي العديد من القطاعات مثل قطاع نقل البضائع. وبالرغم من أنّه يُمكن إستخدام طريقة السمبلكس في حل مشاكل النقل، إلّا أن المواصفات الخاصة التي تتمتع مشاكل النقل تُمكّننا من إستخدام طرق خاصة أسهل بكثير. وهناك عناصر ينبغي توفرها في مشاكل النقل حتى يُمكن حلها باستخدام طريقة حل مشكلة النقل:

- مواقع التوزيع (مصانع، مستودعات،...)، لكل منها كمية عرض محددة؛
- مواقع الطلب (مراكز تجارية، زبائن،...)، لكل منها كمية طلب محددة؛
- هناك تكلفة (ربح) نقل محددة مسبقاً لنقل البضاعة من مواقع التوزيع إلى مواقع الطلب؛
- كمية العرض يجب أن تساوي تماماً كمية الطلب.

2. صياغة مشكلة النقل:

لنفترض أن مؤسسة تملك m وحدة لتوزيع بضاعة معينة، وتقع الوحدات في أماكن متباعدة، حيث:

الوحدة الأولى تقوم بعرض الكمية a_1؛

الوحدة الثانية تقوم بعرض الكمية a_2؛

⋮

الوحدة m تقوم بعرض الكمية a_m.

ويُطلق على الوحدات **بالمنابع**.

تقوم المؤسسة من خلال وحداتها بتموين n منطقة بالبضاعة، حيث تقع هذه المناطق في أماكن متباعدة، حيث:

الكمية التي تطلبها المنطقة الأولى هي b_1؛

الكمية التي تطلبها المنطقة الثانية هي b_2؛

⋮

الكمية التي تطلبها المنطقة n هي b_n.

ويُطلق على المناطق **بالمصاب**.

تكلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من الوحدة i إلى المنطقة المراد تموينها j هي C_{ij}.

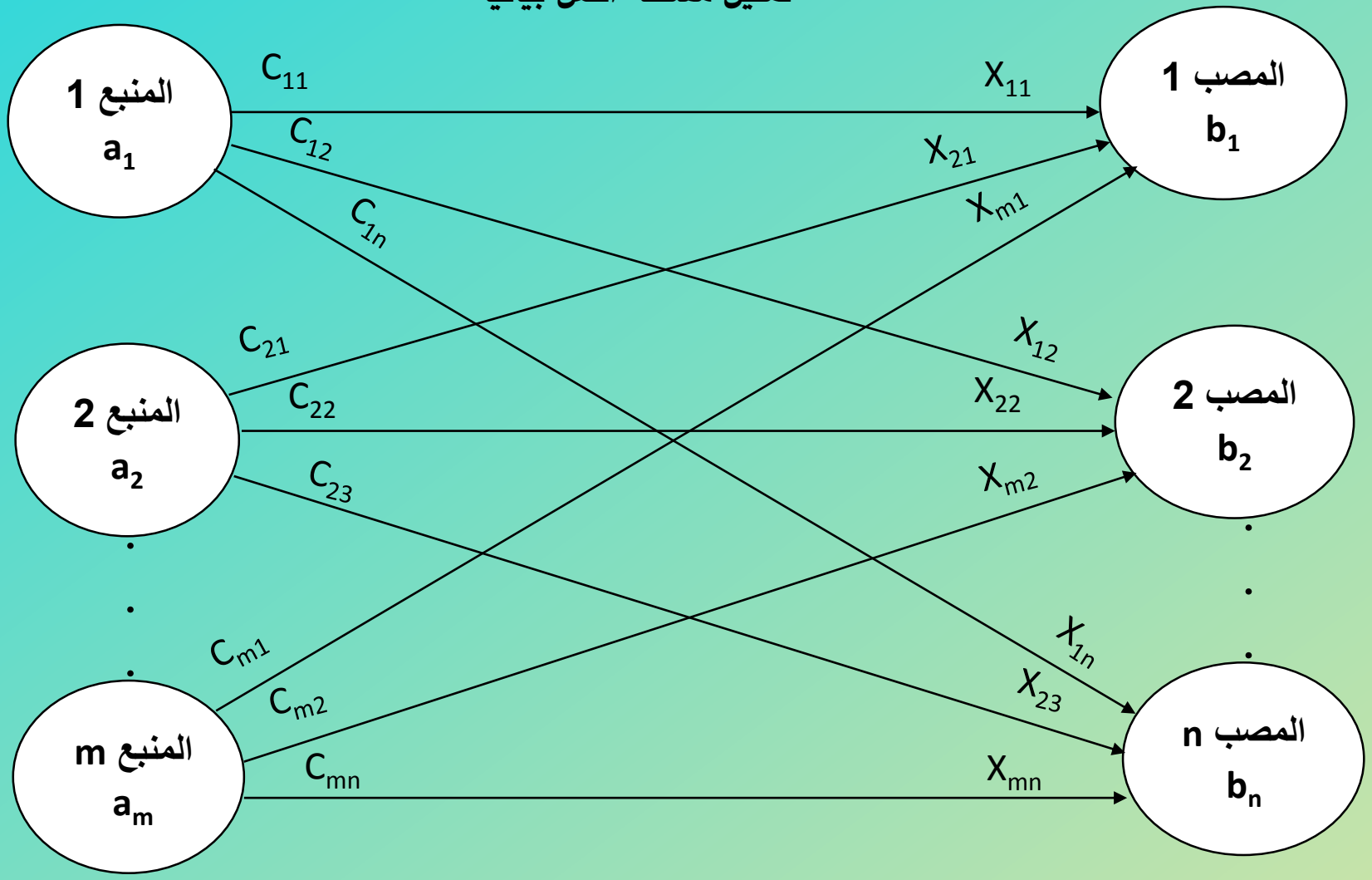
ويُمكن تمثيل أيّة مشكلة نقل من خلال جدول النقل التالي:

المصاب / المنابع	المصب 1	المصب 2	المصب 3	. . .	المصب n	الكميات المعروضة
المنبع 1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	. . .	C_{1n} X_{1n}	a_1
المنبع 2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{23}	. . .	C_{2n} X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
المنبع m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	. . .	C_{mn} X_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2	b_3	. . .	b_n	Q_S / Q_D

وينقسم جدول النقل إلى قسمين: جدول التكاليف وجدول التوزيع. فالأول يُظهر التكاليف الوحدوية لنقل البضاعة من المنابع إلى المصاب والمبينة في أعلى كل خانة إلى اليمين، فمثلا نقل وحدة واحدة من المنبع 1 إلى المصب 1 هي C_{11} وحدة نقدية، ونقل وحدة واحدة من المنبع m إلى المصب n هي C_{mn} وحدة نقدية، أما الثاني فيُظهر الكميات X_{ij} المنقولة من المنابع إلى المصاب وهي موضحة أسفل كل خلية إلى اليسار. ويكون المطلوب هو تلبية طلب المصاب بالبضاعة من خلال ما تعرضه المنابع بأقل تكلفة كلية ممكنة.

ويُمكن تمثيل مشكلة النقل أيضاً من خلال الشكل التالي:

تمثيل مشكلة النقل بيانياً



وينطبق الشرح السابق على مشكلة النقل التي هدفها هو تعظيم الربح أو العوائد، ويتم إستبدال فقط تكاليف نقل الوحدة الواحدة من البضاعة C_{ij} بالربح أو العائد المتحقق من نقل وحدة واحدة من البضاعة P_{ij}.

أ- حالة التقليل:

التكلفة الكلية التي تتحملها المؤسسة من مشكلة النقل هي:

$$Z_{min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij}$$

الكمية التي يعرضها كل منبع هي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i=1,2,\ldots..,m$$

حيث m هو عدد المنابع.

الكمية التي يطلبها كل مصب هي:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\ldots..,n$$

حيث n هو عدد المصاب.

وتُكتب الصياغة الرياضية لمشكلة النقل في حالة التقليل كما يلي:

$$Z_{min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij}$$

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad i=1,2,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \quad j=1,2,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

والمطلوب هو إيجاد القيم X_{ij} التي من شأنها تخفيض التكاليف الكلية إلى أدنى حد.

ب- حالة التعظيم:

الربح الكلي الذي تحققه المؤسسة من مشكلة النقل هو:

$$Z_{max} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} X_{ij}$$

الكمية التي يعرضها كل منبع هي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i=1,2,\ldots..,m$$

حيث m هو عدد المنابع.

الكمية التي يطلبها كل مصب هي:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\ldots..,n$$

حيث n هو عدد المصاب.

ويُكتب النموذج الرياضي لمشكلة النقل بصيغة البرمجة الخطية في حالة التعظيم كما يلي:

$$Z_{max} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, X_{ij}$$

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i & i=1,2,\ldots..,m \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j & j=1,2,\ldots..,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

والمطلوب هو إيجاد القيم X_{ij} التي من شأنها الوصول بالربح إلى أقصى حد.

مثال 1:

تقوم إحدى المؤسسات المختصة في إنتاج وتوزيع مادة الدقيق بتموين 4 مناطق متباعدة بهذه المادة من خلال وحداتها الثلاثة المتواجدة في أماكن متباعدة أيضا. طاقة العرض لكل وحدة من وحدات المؤسسة من مادة الدقيق هي 120 طن، 200 طن و180 طن على التوالي. أما ما تطلبه كل منطقة من مادة الدقيق فهي 90 طن، 160 طن، 170 طن و80 طن على التوالي.

تكلفة نقل كل طن من كل وحدة من الوحدات التي تتكون منها المؤسسة إلى كل منطقة موضحة في الجدول التالي (وحدة نقدية):

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4
الوحدة 1	4	7	3	8
الوحدة 2	6	5	7	9
الوحدة 3	9	6	7	5

المطلوب: اكتب جدول المسألة؟

الحل:

يُكتب جدول مسألة النقل كما يلي:

المناطق / الوحدات	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4	الكميات المعروضة
الوحدة 1	4 X_{11}	7 X_{12}	3 X_{13}	8 X_{14}	120
الوحدة 2	6 X_{21}	5 X_{22}	7 X_{23}	9 X_{24}	200
الوحدة 3	9 X_{31}	6 X_{32}	7 X_{33}	5 X_{34}	180
الكميات المطلوبة	90	160	170	80	**500** / **500**

ويُلاحظ توفر شرط تساوي الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة.

3. حل مشاكل النقل باستخدام الشبكات:

لا يعتمد الحل الشبكي لمشاكل النقل على المصفوفات العددية، بل يعتمد على تمثيل وحل هذه المشاكل على الشبكات.

3-1- تمثيل مشكلة النقل على الشبكة:

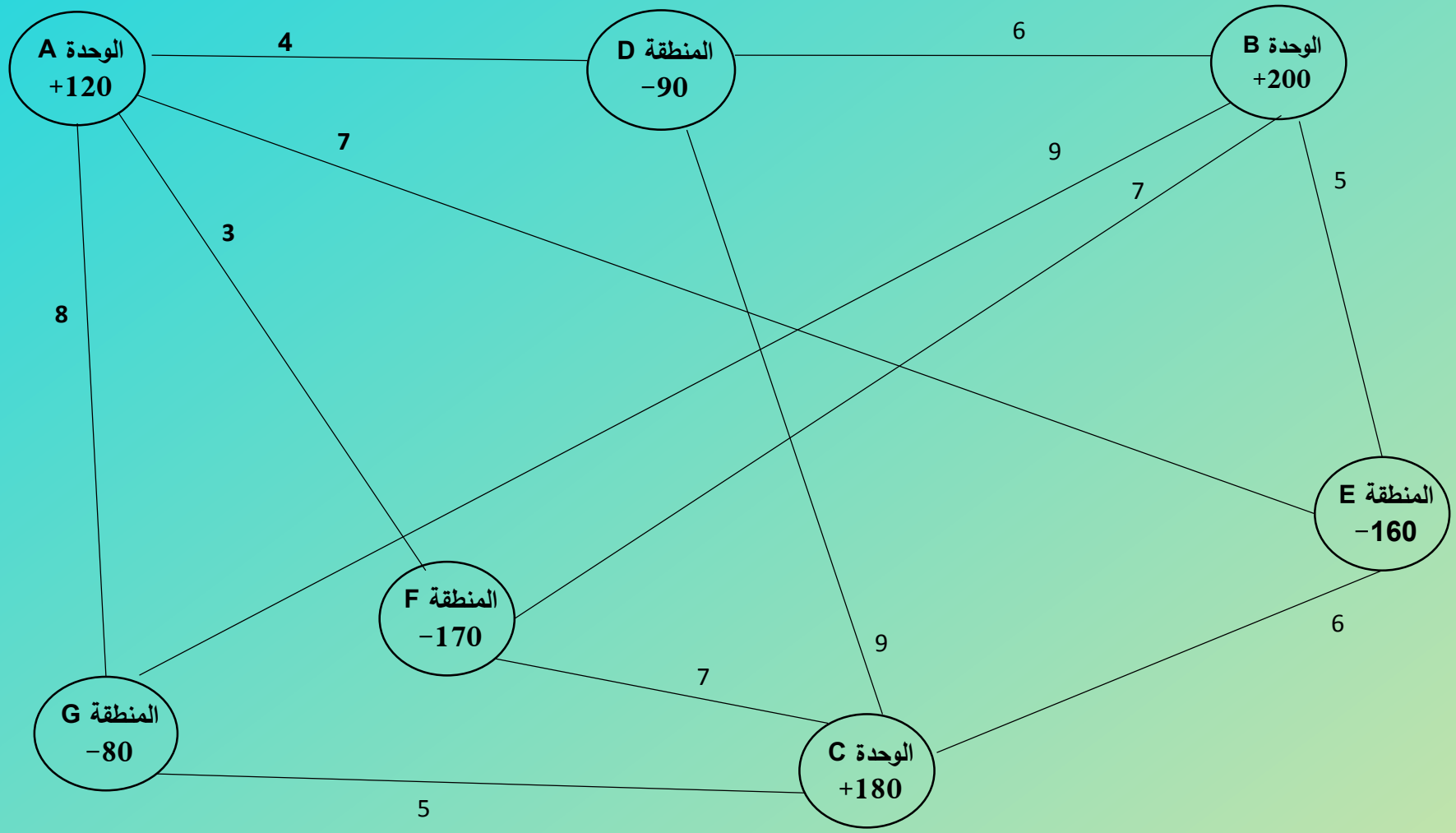
يتم تمثيل مختلف بيانات مشكلة النقل (الكميات المعروضة، الكميات المطلوبة والتكاليف الوحدوية أو الأرباح الوحدوية من كل منبع نحو كل مصب) على الشبكة كما يلي:

- المصاب أو المنابع يتم تمثيلها من خلال دوائر، كل دائرة تمثل منبع أو مصب. ويتم التعبير عن المنبع بوضع طاقة العرض بإشارة موجبة داخل الدائرة، في حين يتم التعبير عن المصب بوضع إشارة سالبة أمام كمية الطلب داخل الدائرة. ويتم وضع إسم كل منبع وكل مصب داخل الدائرة أو فوق الدائرة.

- خطوط تمثل إتجاهات الإتصال بين المنابع والمصاب، وهذه الخطوط تعني الطرق أو الممرات أو المسارات التي يُمكن أن تسلكها البضاعة بتكلفة وحدوية أو ربح وحدوي من كل منبع إلى كل مصب. ويُمكن للشحنة أن تمر عبر منبع آخر أو مصب آخر، وبالتالي تصبح التكلفة (الربح) مساوية لمجموع تكلفة (ربح) الممرين أو المسارين.

إذا تُعطى شروط وقيود مشكلة النقل مباشرة على الشبكة من خلال التعبير عنها بدوائر وخطوط إتصال.

ويُمكن تمثيل المثال 1 على الشبكة كما يلي:



2.3. عرض حل مشكلة النقل بطريقة الشبكة:

1.2.3. إيجاد خطة التوزيع الأولى:

إن الهدف من تمثيل مشكلة النقل على الشبكة هو البحث عن الحل الأمثل لها، أي خطة التوزيع التي تحقق أقل تكلفة كلية في حالة كان الهدف هو التقليل، أو التي تحقق أقصى ربح في حالة كان الهدف هو التعظيم. ويتم البحث عن الحل الأمثل لمشكلة النقل باستخدام الشبكة مباشرة وبالطريقة المرحلية، حيث أن كل مرحلة من مراحل الحل تمثل خطة توزيع أكثر مثلوية من خطة التوزيع السابقة لها.

وتبدأ عملية البحث عن الحل الأمثل بوضع الخطة الأولية للحل على الشبكة مباشرة، أي خطة التوزيع الأولى، بحيث يتم توزيع كامل الكميات المعروضة وتلبية كامل الكميات المطلوبة. ويُراعى في هذه العملية التكاليف الدنيا في نقل الشحنات بين المنابع والمصاب في حالة التقليل، وأعلى الأرباح أو الإيرادات في حالة التعظيم. ويتم وضع هذه الشحنات ضمن أسهم تبين إتجاه الشحنة وحجمها.

ويجب على كل خطة توزيع (الخطة الأولى والخطط اللاحقة) أن تحقق الشروط التالية:

- يجب توزيع كامل الكمية المعروضة من طرف المنابع، وتلبية كامل الكمية المطلوبة من طرف المصاب؛
- يجب أن تكون كل دائرة في شبكة النقل موصولة مع باقي الشبكة بشحنة واحدة على الأقل، ويتمثل هذا الوصل من خلال أسهم الشحنات؛
- عدد أسهم الشحنات في شبكة النقل يجب أن يكون دائماً مساوياً إلى مجموع عدد الدوائر ناقص واحد؛
- الأسهم لا يجب أن تشكل حلقة مغلقة، بحيث تعود الشحنة إلى نفس المكان الذي خرجت منه؛
- لا يُمكن لدائرتين أن تتصلان بأكثر من سهم واحد، وعند الحاجة تُجمع الشحنات المارة من نفس الخط في قيمة واحدة فقط توضع على السهم الوحيد للشحنة المارة بين دائرتين.

وبتطبيق ما سبق على المثال رقم 1 الذي تم تمثيله على الشبكة يُمكن إيجاد خطة التوزيع الأولى كما يلي (مع التذكير أننا في حالة تقليل التكلفة):

– نبحث عن أقل تكلفة شحن على شبكة النقل، ونجد أن قيمة هذه التكلفة هي 3 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة F. الكمية التي تطلبها المنطقة F هي 170 طن، في حين أن طاقة العرض للوحدة A هي 120 طن. في هذه الحالة تموّن الوحدة A المنطقة F بكامل طاقة عرضها، وبالتالي تبقى المنطقة F في حاجة لكمية 50 طن. ويتم تمثيل هذه العملية من خلال وضع سهم إتجاهه من الدائرة التي تمثل الوحدة A نحو الدائرة التي تمثل المنطقة F، وكمية الشحنة التي يحملها السهم هي 120 طن.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على شبكة النقل هي 4 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة D. وبما أن الوحدة A إستنفدت كامل طاقة عرضها، فإن هذا المسار لا يمكن تمرير شحنة عبره.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 5 وحدات نقدية والموجودة على مسارين: المسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة E، والمسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة G. نحدد الكمية التي يُمكن إمرارها عبر كل مسار من هذين المسارين ونختار المسار الذي يُمكن إمرار عبره أكبر كمية. فيما يخص المسار الأول، الكمية التي تطلبها المنطقة E هي 160 طن، وهي كمية يُمكن تلبيتها بالكامل من الوحدة B لأن طاقة عرضها هي 200 طن. إذا كمية الشحنة التي يُمكن إمرارها عبر هذا المسار هي 160 طن. أما فيما يخص المسار الثاني، الكمية التي تطلبها المنطقة G هي 80 طن، وهي كمية يُمكن تلبيتها بالكامل من الوحدة C لأن طاقة عرضها هي 180 طن. إذا كمية الشحنة التي يُمكن إمرارها عبر هذا المسار هي 80 طن. وبما أن الشحنة التي يُمكن إمراراها على المسار الأول أكبر من الشحنة التي يُمكن إمرارها على المسار الثاني، إذا نختار المسار الأول، أي المسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة E. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E يحمل شحنة بـ 160 طن.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً قيمتها هي نفس قيمة التكلفة الأقل السابقة وهي 5 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة G، وهو المسار الذي لم يتم إختياره في الخطوة السابقة. الكمية التي تطلبها المنطقة G وهي 80 طن يُمكن تلبيتها بالكامل من طرف الوحدة C التي طاقة عرضها 180 طن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة G يحمل شحنة بـ 80 طن.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 6 وحدات نقدية والموجودة على مسارين: المسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة E، والمسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة D. المسار الأول لا يُمكن إمرار شحنة عبره لأن المنطقة E تحصلت على كامل الكمية المطلوبة. أما فيما يخص المسار الثاني، فالكمية التي تطلبها المنطقة D هي 90 طن، في حين أن الكمية التي مازالت تعرضها الوحدة B هي 40 طن فقط، لأن هذه الوحدة، والتي طاقة عرضها 200 طن، قامت بتموين المنطقة E بـ 160 طن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D يحمل شحنة بـ 40 طن.

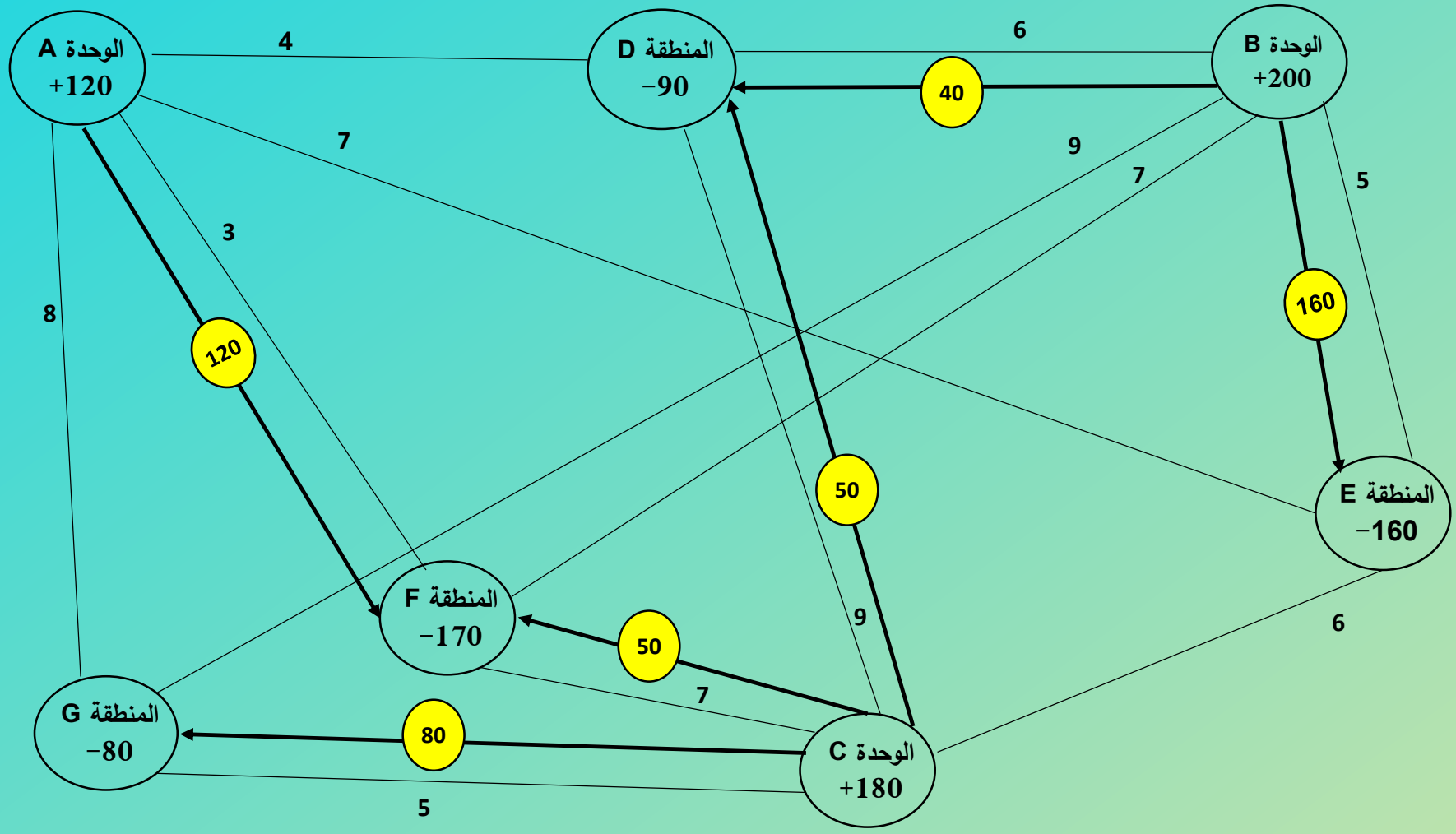
– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 7 وحدات نقدية والموجودة على 3 مسارات: المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة E، المسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة F، والمسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة F. ويُلاحظ أن المسارين الأول والثاني لا يُمكن إمرار عبرهما أية شحنة لأن الوحدتين A وB وزعتا كامل الكميتان اللتين تعرضانها، بالإضافة إلى أن المنطقة E إستوفت كامل الكمية التي تطلبها. أما فيما يخص المسار الثالث، المنطقة F مازالت في حاجة لـ 50 طن، بعد أن تحصلت على 120 طن من الوحدة A، وهي كمية يُمكن تلبيتها بالكامل من الوحدة C التي مازالت تمتلك كمية بـ 100 طن بعد أن موّنت المنطقة G بـ 80 طن.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 8 وحدات نقدية والموجودة على المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة G. ويُلاحظ أن هذا المسار لا يُمكن إمرار شحنة عبره لأن الوحدة A إستنفدت كامل الكمية التي تعرضها، كما أن المنطقة G إستوفت كامل الكمية التي تطلبها.

– أقل تكلفة شحن موالية تصاعدياً على الشبكة هي 9 وحدات نقدية والموجودة على مسارين: المسار الرابط بين الوحدة B والمنطقة G، والمسار الرابط بين الوحدة C والمنطقة D. المسار الأول لا يُمكن إمرار شحنة عبره لأن الوحدة B إستنفدت كامل الكمية التي تعرضها، والمنطقة G إستوفت كامل الكمية التي تطلبها. أما فيما يخص المسار الثاني، المنطقة D مازالت في حاجة لـ 50 طن، بعد أن تحصلت على 40 طن من الوحدة B، وهي كمية يُمكن الحصول عليها بالكامل من الوحدة C التي مازالت تملك كمية بـ 50 طن بعد أن موّنت كل من المنطقة G والمنطقة F بـ 80 طن و50 طن على التوالي. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D يحمل شحنة بـ 50 طن.

وبهذا تكون الوحدات الثلاثة قد وزعت كامل الكميات التي تعرضها، والمناطق الأربعة قد تحصلت على كامل الكميات التي تطلبها كما هو موضح على شبكة النقل التالية التي تمثل خطة التوزيع الأولى:

خطة التوزيع الأولى



وتُحسب قيمة التكلفة الكلية عند خطة التوزيع الأولى بجمع مضروب كل شحنة بالتكلفة الوحدوية المقابلة لها على نفس المسار كما يلي:

$Z_{min} = (40 \times 6) + (160 \times 5) + (50 \times 9) + (50 \times 7) + (120 \times 3) + (80 \times 5) = 2600$ وحدة نقدية

وكما وضحناه أعلاه، فإن أية خطة توزيع يجب أن تتوفر فيها عدد من الشروط والتي سنتحقق من توفرها في هذه الخطة:

- جميع الوحدات وزعت كامل الكميات التي تعرضها، وجميع المناطق تحصلت على كامل الكميات المطلوبة، وبالتالي لا يوجد فائض أو عجز في الكميات المعروضة أو المطلوبة؛
- لا توجد أية دائرة غير موصولة بسهم (شحنة)؛
- عدد الأسهم هو 6 أسهم، أي بعدد الدوائر التي عددها سبعة ناقص واحد؛
- الأسهم لم تشكل حلقة مغلقة؛
- لا توجد دائريتن تتصلان بأكثر من سهم واحد.

إذا جميع الشروط متوفرة في خطة التوزيع الأولى.

2.2.3. إختبار مثلوية خطة التوزيع وتمثيل خطة التوزيع الموالية:

لإختبار ما إذا كانت أية خطة توزيع مثلى أو لا، ينبغي أولاً حساب قيم فرضيات خطة التوزيع عند كل دائرة من دوائر شبكة النقل. ولحساب هذه القيم نفترض عند إحدى الدوائر قيمة، ويُفضّل أن تكون قريبة من تكاليف النقل (أرباح النقل)، لكن يُمكن أن نفترض أية قيمة، ثم نقوم بإضافة تكاليف النقل (أرباح النقل) إلى هذه القيمة أو طرحها منها حسب إتجاه السهم (كما سنبينه أدناه)، حيث يجب أن تتوفر لدينا قيمة فرضية أمام كل دائرة.

سنفترض القيمة 10 كقيمة لفرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A، ثم نحسب باقي قيم فرضيات الدوائر كما يلي:

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A: تم إفتراض القيمة **10**.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة F: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة A إلى الدائرة التي تمثل المنطقة F، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 3 وحدات نقدية. قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة F هي حاصل جمع قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A وتكلفة الشحن الوحدوية، أي **10+3=13**.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة C: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة C إلى الدائرة التي تمثل المنطقة F، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 7 وحدات نقدية. نتحصل على قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة C بطرح قيمة تكلفة الشحن الوحدوية من قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة F، أي **13−7=6**.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة G: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة C إلى الدائرة التي تمثل المنطقة G، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 5 وحدات نقدية. قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة G هي حاصل جمع قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة C وتكلفة الشحن الوحدوية، أي **6+5=11**.

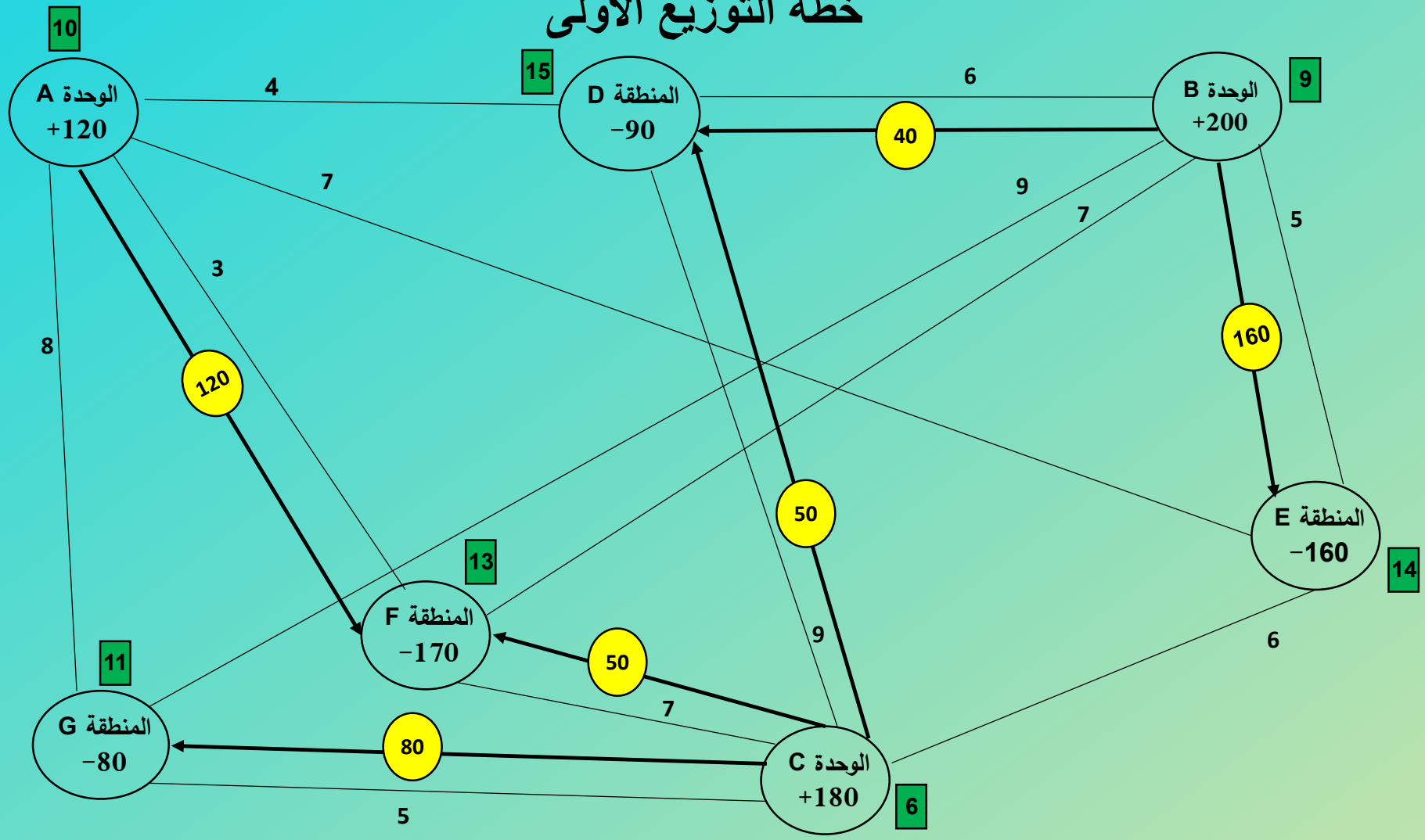
قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة D: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة C إلى الدائرة التي تمثل المنطقة D، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 9 وحدات نقدية. قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة D هي حاصل جمع قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة C وتكلفة الشحن الوحدوية، أي **6+9=15**.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة B: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة B إلى الدائرة التي تمثل المنطقة D، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 6 وحدات نقدية. نتحصل على قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة B بطرح قيمة تكلفة الشحن الوحدوية من قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة D، أي **15−6=9**.

قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة E: إتجاه السهم من الدائرة التي تمثل الوحدة B إلى الدائرة التي تمثل المنطقة E، وتكلفة الشحن الوحدوية على هذا المسار هي 5 وحدات نقدية. قيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة E هي حاصل جمع قيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة B وتكلفة الشحن الوحدوية، أي **9+5=14**.

وجميع قيم فرضيات الدوائر موضّحة على شبكة النقل بمربعات أمام كل دائرة كما يلي:

خطة التوزيع الأولى



ويُمكن إستخدام قيم فرضيات الدوائر في حساب قيمة التكلفة الكلية من خلال جمع حاصل ضرب كل قيمة فرضية دائرة بمحتوى الدائرة المقابلة لها، مع المحافظة على الإشارة الجبرية كما يلي:

$$Zmin=[10x(120)]+[13x(-170)]+[6x(180)]+[11x(-80)]+[15x(-90)]+[9x(200)]+[14x(-160)]$$

$$=|-2600|=$$ **وحدة نقدية 2600**

حيث نأخذ القيمة المتحصل عليها بقيمتها المطلقة.

وبعد إيجاد قيم فرضيات الدوائر، يتم إختبار مثلوية كل خطة توزيع بحساب قيم على المسارات التي لا تحمل شحنات يُرمز لها بـ σ_{ij}، وتكون خطة التوزيع مثلى عندما تحقق جميع الفرضيات الشرط $\sigma_{ij} \geq 0$ في حالة كان الهدف هو التقليل، و $\sigma_{ij} \leq 0$ في حالة كان الهدف هو التعظيم. ويتم حساب قيم σ_{ij} حسب العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij} = C_{ij} - (V_j - U_i)}$$

حيث:

σ_{ij}: مقياس مثلوية التوزيع من الدائرة (i) إلى الدائرة (j) على مسار لا يحمل شحنة؛

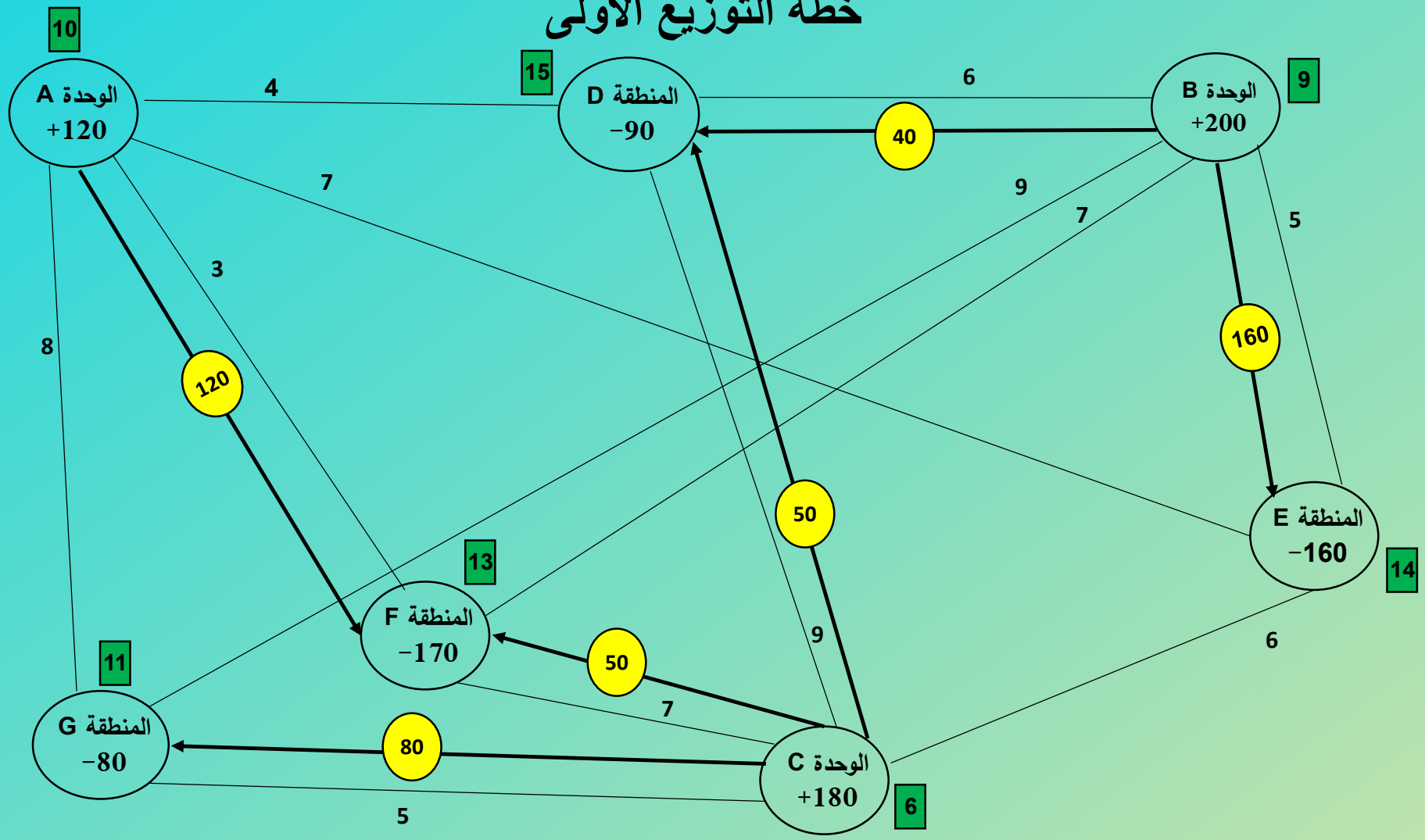
C_{ij}: تكلفة الشحن الوحدوية (الربح الوحدوي على الشحن) من الدائرة (i) إلى الدائرة (j) على مسار لا يحمل شحنة. وفي حالة التعظيم نستبدل C_{ij} بـ P_{ij}؛

V_j: قيمة فرضية الدائرة (j) على مسار لا يحمل شحنة. والدائرة (j) تمثل دائرة يمكن أن تتلقى شحنة؛

U_i: قيمة فرضية الدائرة (i) على مسار لا يحمل شحنة. والدائرة (i) تمثل دائرة يمكن أن تكون مصدر شحنة؛

نقوم بحساب قيم σ_{ij} كما يلي :

خطة التوزيع الأولى



$$\sigma_{AD} = 4 - (15 - 10) = -1$$

$$\sigma_{AG} = 8 - (11 - 10) = 7$$

$$\sigma_{AE} = 7 - (14 - 10) = 3$$

$$\sigma_{CE} = 6 - (14 - 6) = -2$$

$$\sigma_{BG} = 9 - (11 - 9) = 7$$

$$\sigma_{BF} = 7 - (13 - 9) = 3$$

ويُلاحظ أن هناك قيمتين سالبتين وهما $\sigma_{AD}=-1$ و$\sigma_{CE}=-2$ ، وهذا يعني أن خطة التوزيع الأولى غير مثلى. يتم إختيار أكبر قيمة سالبة وهي 2−، ويتم إعداد خطة التوزيع الثانية كما يلي:

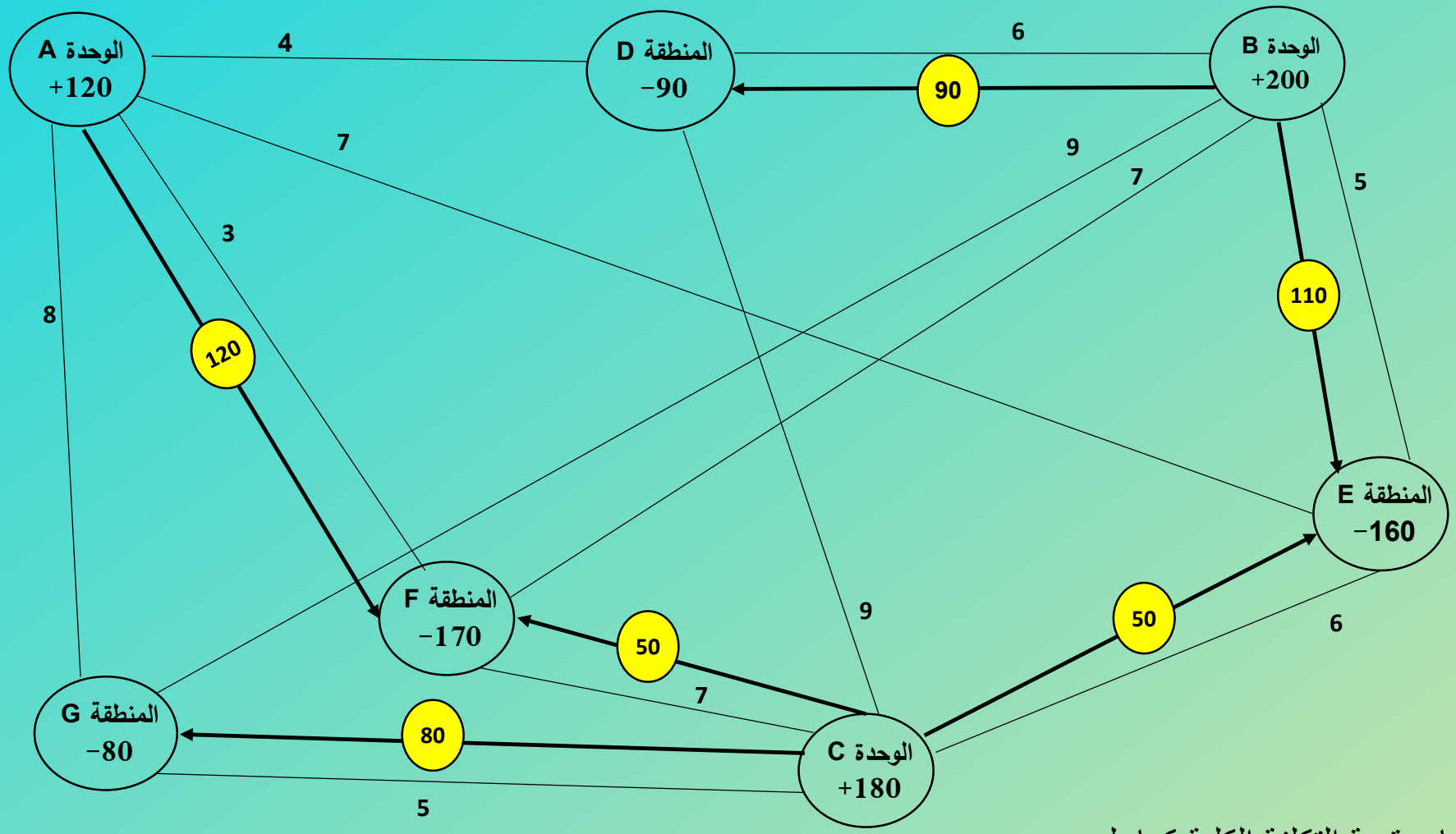
– بما أن القيمة السالبة التي تم إختيارها تم حسابها على المسار الذي لا يحمل شحنة والرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة E، فإنه يتم وضع سهم جديد إتجاهه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E.

– البحث عن سلسلة الشحنات التي يغلقها السهم الجديد، ونجد أن هذه السلسلة تمر بالدوائر التي تمثل الوحدات والمناطق C–E–B–D. ويُمكن توضيح عملية تحديد السلسلة التي يغلقها السهم الجديد كما يلي: يكون الإنطلاق من الدائرة التي ينطلق منها السهم الجديد، ثم يتم تتبع المسار الذي يحتوي بشكل متتابع على أسهم تحمل شحنات حتى نصل إلى السهم الذي نهايته تكون عند الدائرة التي إنطلقنا منها.

– على سلسلة الشحنات المتحصل عليها من الخطوة السابقة نحدد الأسهم التي لها إتجاه معاكس للسهم الجديد، ونحدد أيّهم يحمل أقل شحنة. ونجد أن هناك سهمين لهما إتجاه معاكس للسهم الجديد هما السهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E ويحمل شحنة بـ 160 طن، والسهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D ويحمل شحنة بـ 50 طن، وبالتالي فإن أقل شحنة هي 50 طن والتي يحملها السهم الثاني.

– نضع كمية الشحنة المتحصل عليها في الخطوة السابقة ضمن السهم الجديد، وهذا يعني أن الوحدة C تموّن المنطقة E بـ 50 طن، ثم نقوم بإضافة نفس الكمية إلى الأسهم التي لها نفس إتجاه السهم الجديد، ونطرحها من الأسهم التي لها إتجاه معاكس للسهم الجديد وهذا بالنسبة للأسهم الموجودة ضمن السلسلة فقط، أما باقي الأسهم خارج السلسلة فتبقى بدون تغيير.

خطة التوزيع الثانية



ويتم حساب قيمة التكلفة الكلية كما يلي:

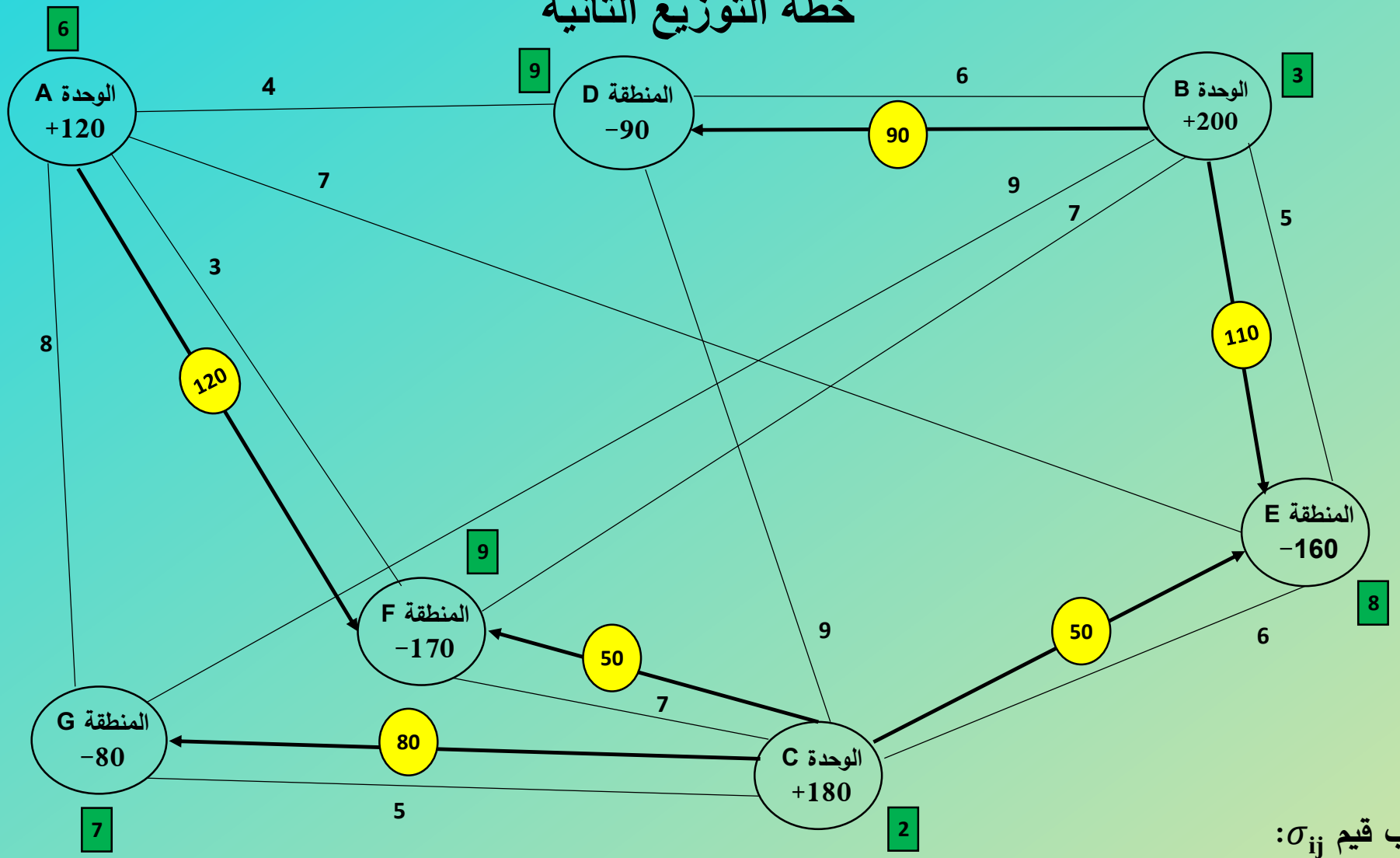
$Z_{min} = (90 \times 6) + (110 \times 5) + (50 \times 6) + (50 \times 7) + (120 \times 3) + (80 \times 5) = 2500$ وحدة نقدية

ويُلاحظ أن قيمة التكلفة الكلية إنخفضت بـ 100 وحدة نقدية.

ويُمكن أيضاً معرفة قيمة الإنخفاض في التكلفة الكلية من خلال ضرب كمية الشحنة التي يحملها السهم الجديد في قيمة E_{CE}، أي: وحدة نقدية $50 \times (-2) = -100$

وبعد الحصول على خطة التوزيع الثانية، نقوم باختبارها لمعرفة ما إذا كانت مثلى أو لا باتباع نفس الخطوات التي تم شرحها سابقاً.

خطة التوزيع الثانية



حساب قيم σ_{ij}:

$\sigma_{AD} = 4 - (9 - 6) = 1$ $\sigma_{AE} = 7 - (8 - 6) = 5$ $\sigma_{BF} = 7 - (9 - 3) = 1$

$\sigma_{AG} = 8 - (7 - 6) = 7$ $\sigma_{BG} = 9 - (7 - 3) = 5$ $\sigma_{CD} = 9 - (9 - 2) = 2$

ويُلاحظ أنه لا توجد أية قيمة سالبة لـ σ_{ij}، وبالتالي فإن خطة التوزيع الثانية هي خطة التوزيع المثلى.

إذا:

- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة F بـ 120 طن من الدقيق.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة D بـ 90 طن من الدقيق.
  - المنطقة E بـ 110 طن من الدقيق.
- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة E بـ 50 طن من الدقيق.
  - المنطقة F بـ 50 طن من الدقيق.
  - المنطقة G بـ 80 طن من الدقيق.

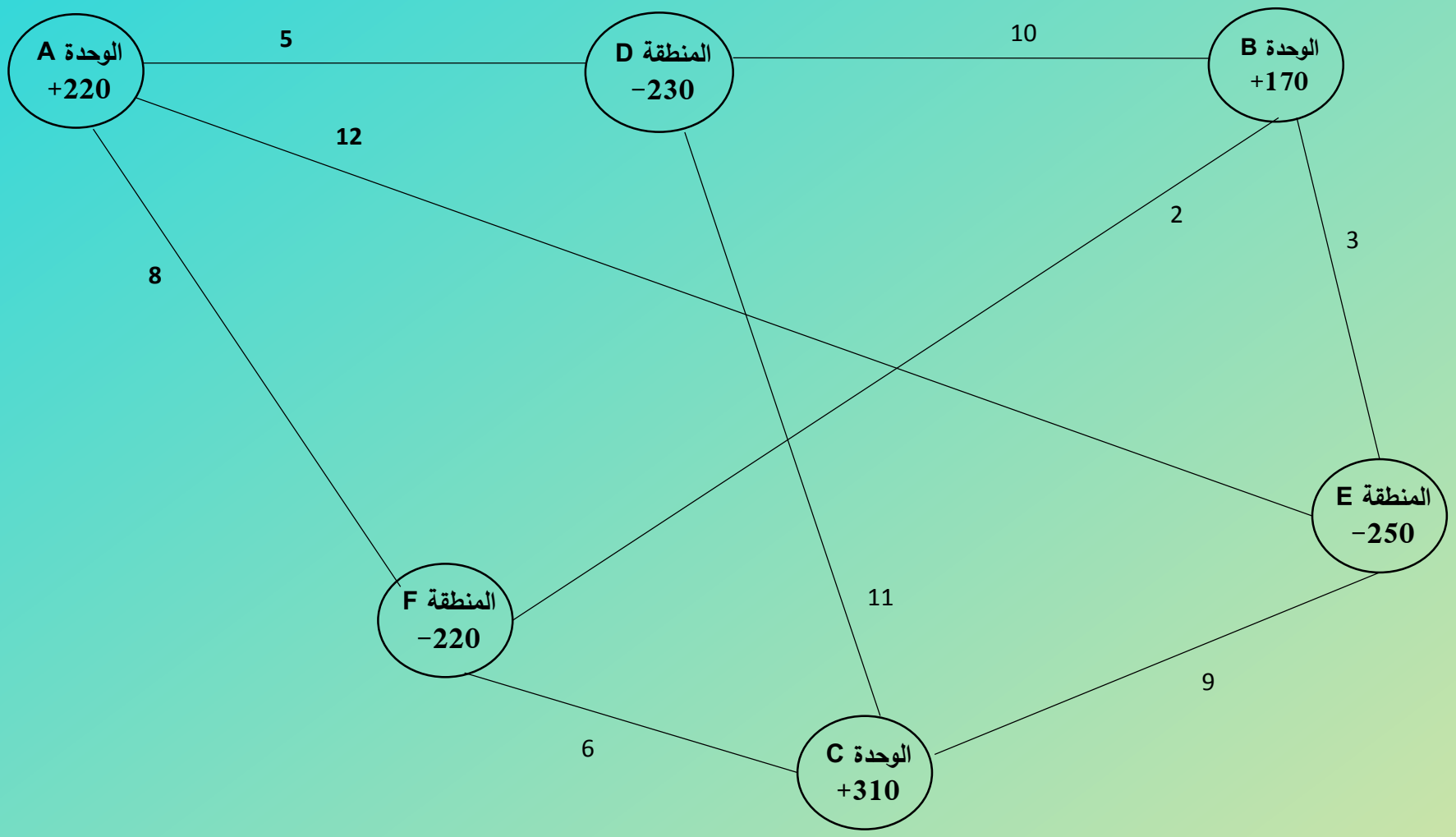
والتكلفة الكلية التي تتحملها المؤسسة من عملية توزيع الدقيق من وحداتها الثلاثة نحو المناطق الأربعة هي 2500 وحدة نقدية.

ملاحظة:

– عند تساوي أكبر قيمتين سالبتين (أو أكثر) عند حساب قيم σ_{ij}، فإنه يتم المفاضلة بينهما على أساس أكبر شحنة يمكن أن يحملها السهم الجديد في كل سلسلة.

مثال 2:

ليكن لديك شبكة النقل التالية والتي تبيّن الكميات التي تعرضها الوحدات، والكميات التي تطلبها المناطق، والأرباح الوحدوية المتحققة من شحن الكميات من الوحدات إلى المناطق (الوحدة من الكميات: طن، الوحدة من الأرباح الوحدوية: وحدة نقدية):



المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تحقق أعظم ربح كلي باستخدام الشبكات؟

الحل:

لا تختلف خطوات حل مسائل النقل على الشبكات في حالة التعظيم عنها في حالة التقليل إلّا في الخطوتين التاليتين:

- عملية توزيع الشحنات على شبكة النقل في خطة التوزيع الأولى تتم على أساس أعلى الأرباح الوحدوية؛
- تكون خطة التوزيع مثلى عندما تحقق قيم فرضيات خطة التوزيع الشرط $\sigma_{ij} \leq 0$.

نبحث عن أعلى ربح وحدوي على الشبكة، ونجد أن قيمة هذا الربح هي 12 وحدة نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة A والدائرة التي تمثل المنطقة E. الكمية التي تطلبها المنطقة E هي 250 طن، في حين أن طاقة عرض الوحدة A هي 220 طن. في هذه الحالة تموّن الوحدة A المنطقة E بكامل طاقة عرضها، وتبقى المنطقة E في حاجة إلى 30 طن (250 طن−220 طن). نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة A نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E يحمل شحنة بـ 220 طن.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 11 وحدة نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة D. الكمية التي تطلبها المنطقة D هي 230 طن، في حين أن طاقة عرض الوحدة C هي 310 طن. في هذه الحالة الوحدة C تموّن بالكامل ما تطلبه المنطقة D، وتبقى لدى الوحدة C كمية بـ 80 طن (310 طن − 230 طن). نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D يحمل شحنة بـ 230 طن.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 10 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة D. وهذا المسار لا يُمكن تمرير شحنة عبره لأن المنطقة D إستوفت كامل الكمية التي تطلبها.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 9 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة E. المنطقة E مازالت في حاجة لـ 30 طن، في حين أن الوحدة C مازالت تملك كمية بـ 80 طن. في هذه الحالة الوحدة C تموّن المنطقة E بـ 30 طن، وبهذا تكون المنطقة E قد إستوفت كامل الكمية التي تطلبها، وتبقى لدى الوحدة C كمية بـ 50 طن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة E يحمل شحنة بـ 30 طن.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 8 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الوحدة A والمنطقة F. وهذا المسار لا يُمكن تمرير شحنة عبره لأن الوحدة A إستنفدت كامل الكمية التي تعرضها.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 6 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة C والدائرة التي تمثل المنطقة F. المنطقة F في حاجة لـ 220 طن، في حين أن الوحدة C مازالت تملك كمية بـ 50 طن. في هذه الحالة الوحدة C تموّن المنطقة F بـ 50 طن، وبهذا تكون الوحدة C قد إستنفدت كامل طاقة عرضها، في حين تبقى المنطقة F في حاجة لـ 170 طن. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة Fيحمل شحنة بـ 50 طن.

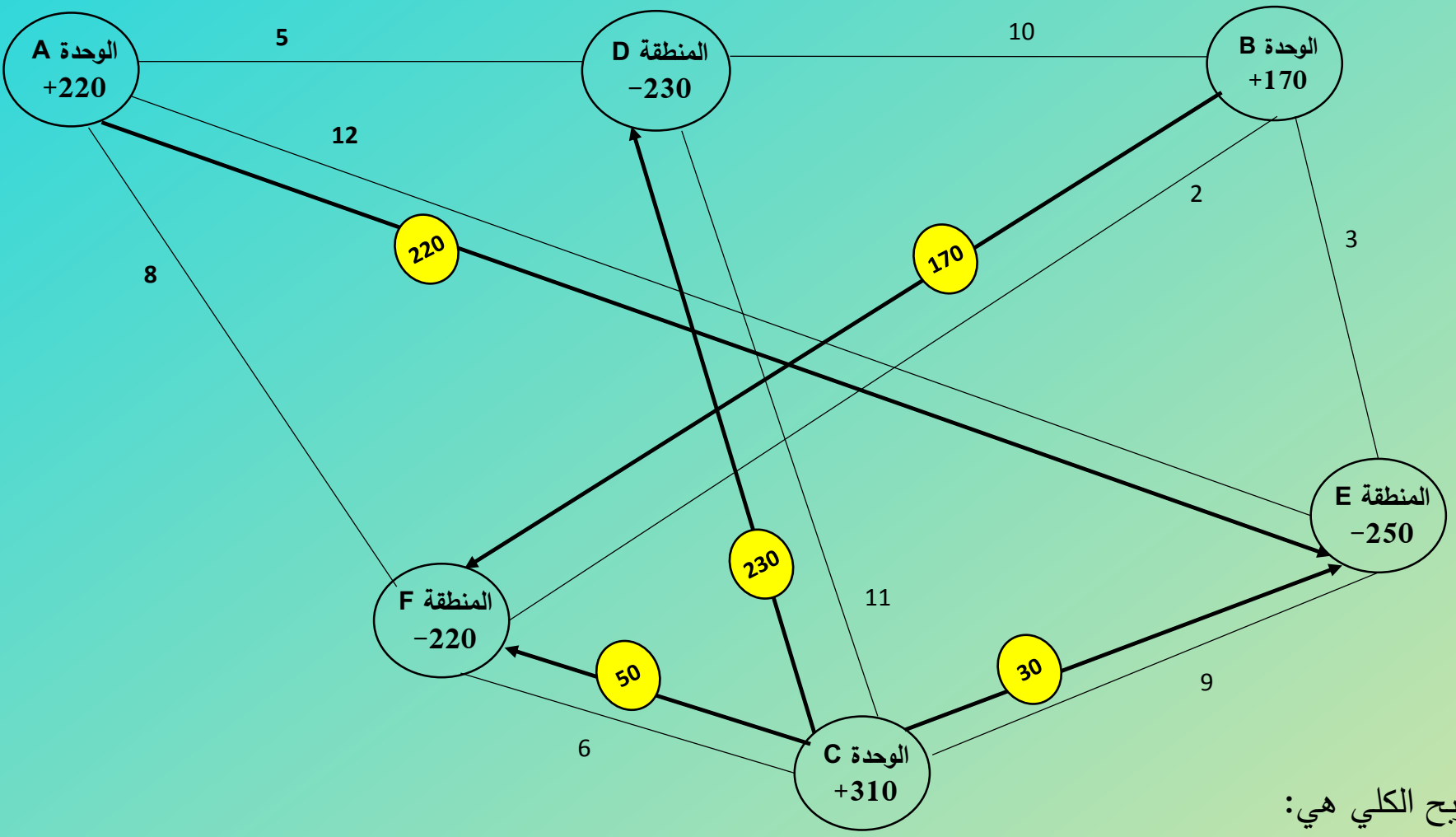
أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 5 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة Aوالدائرة التي تمثل المنطقة D. وهذا المسار لا يُمكن تمرير شحنة عبره لأن المنطقة D إستوفت كامل الكمية التي تطلبها، والوحدة A إستنفدت كامل الكمية التي تعرضها.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو 3 وحدات نقدية والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة E. وهذا المسار لا يُمكن تمرير شحنة عبره لأن المنطقة Eإستوفت كامل الكمية التي تطلبها.

أعلى ربح وحدوي موالي تنازلياً هو وحدتين نقديتين والموجود على المسار الرابط بين الدائرة التي تمثل الوحدة B والدائرة التي تمثل المنطقة F. المنطقة B مازالت في حاجة لـ 170 طن، والوحدة B طاقة عرضها 170 طن. في هذه الحالة الوحدة B تموّن بكامل طاقة عرضها الكمية المطلوبة المتبقية من طرف المنطقة F. نضع سهم يتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة Fيحمل شحنة بـ 170 طن.

وشبكة النقل التالية تمثل خطة التوزيع الأولى:

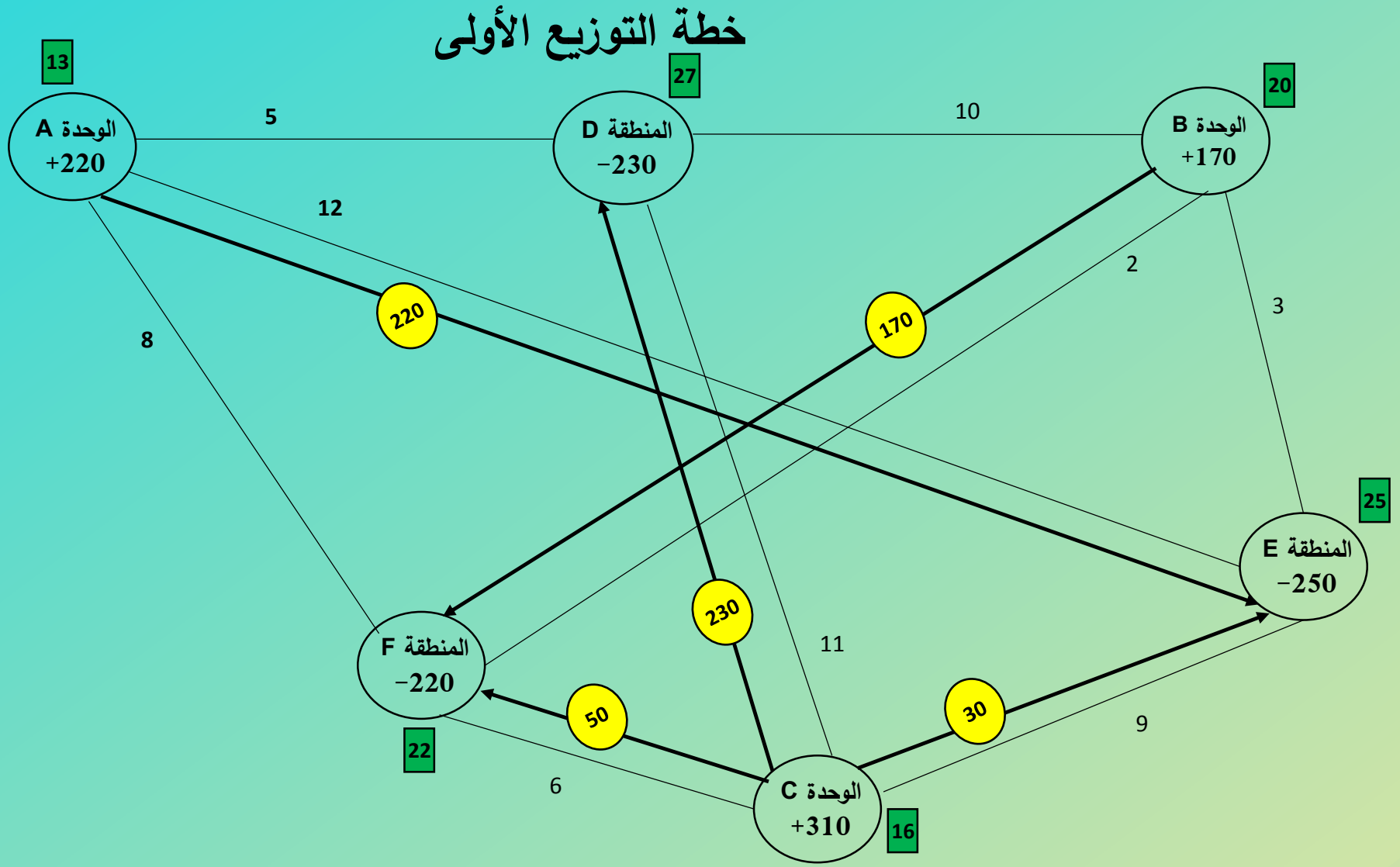
خطة التوزيع الأولى



وقيمة الربح الكلي هي:

$$Z_{max} = (220 \times 12) + (230 \times 11) + (30 \times 9) + (50 \times 6) + (170 \times 2) = 6080$$ وحدة نقدية

ولإختبار مثلوية خطة التوزيع الأولى يتم أولاً حساب قيم فرضيات خطة التوزيع عند كل دائرة بنفس الطريقة التي حسبنا بها هذه القيم في المثال 1. لنفترض القيمة 13 كقيمة فرضية الدائرة التي تمثل الوحدة A، ثم نحسب باقي قيم الفرضيات عند كل دائرة كما هي موضحة في شبكة النقل التي تمثل خطة التوزيع الأولى كما يلي:



ويُمكن إستخدام قيم الفرضيات لحساب قيمة الربح الكلي كما يلي:

Z_{max}= [13x(220)]+[27x(−230)]+[20x(170)]+[25x(−250)]+[16x310)]+[22x(−220)]

=|−6080|=**6080** **وحدة نقدية**

ونأخذ قيمة الربح الكلي بقيمته المطلقة.

نقوم ثانياً بحساب قيم σ_{ij} كما يلي:

$$\sigma_{AD} = 5 - (27 - 13) = -9$$

$$\sigma_{AF} = 8 - (22 - 13) = -1$$

$$\sigma_{BD} = 10 - (27 - 20) = \mathbf{3}$$

$$\sigma_{BE} = 3 - (25 - 20) = -2$$

بما أن هناك قيمة موجبة وهي $\sigma_{BD}=3$، فهذا يعني أن خطة التوزيع الأولى غير مثلى، وبالتالي ينبغي إعداد خطة التوزيع الثانية كما يلي:

- وضع سهم جديد إتجاهه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D.

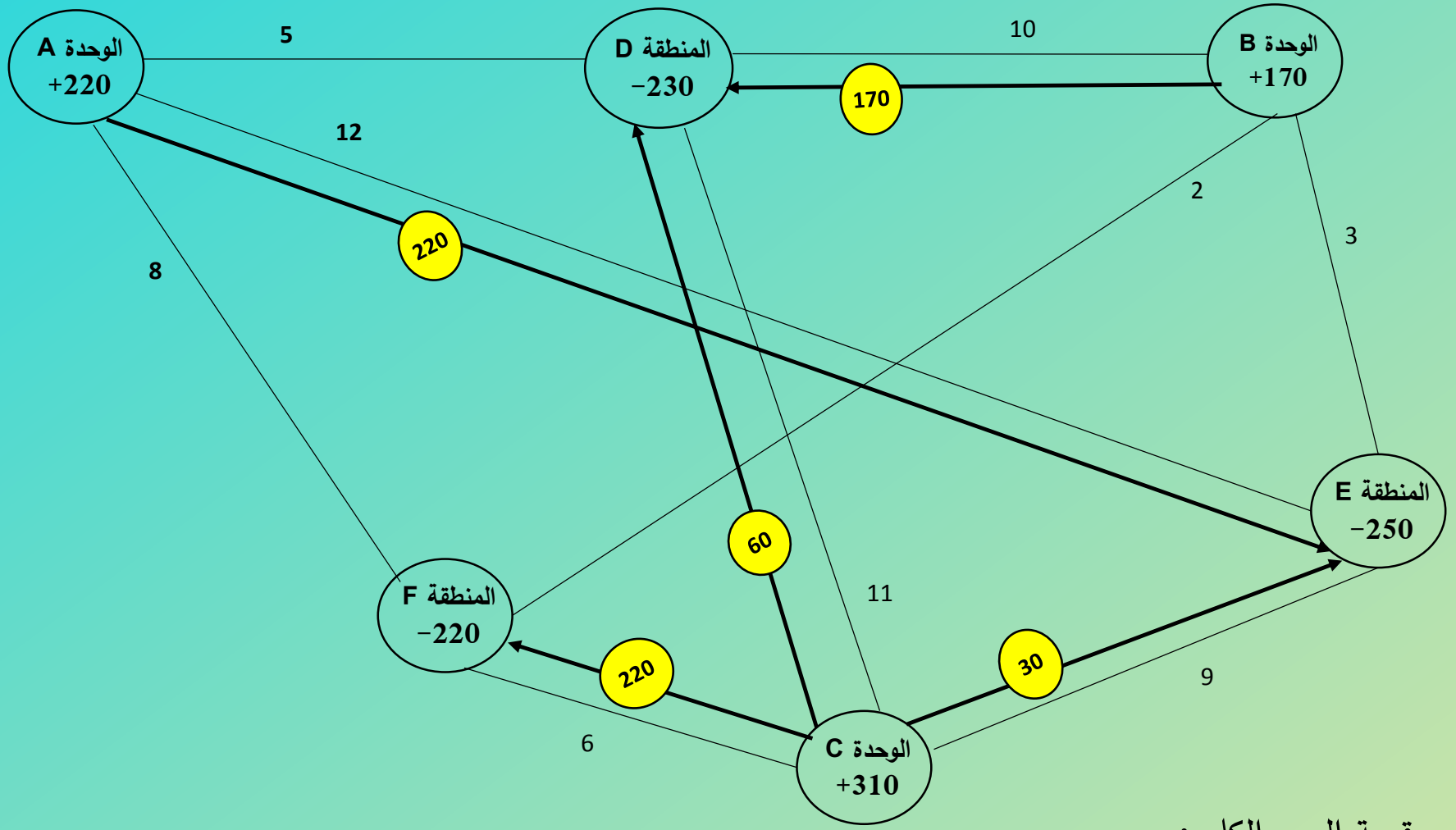
- البحث عن سلسلة الشحنات التي يغلقها هذا السهم. ونجد أن هذه السلسلة تمر بالدوائر التي تمثل الوحدات والمناطق B–D–C–F.

- على سلسلة الشحنات المتحصل عليها في الخطوة السابقة نحدد الأسهم التي لها إتجاه معاكس للسهم الجديد، ونحدد أيّهم يحمل أقل شحنة. ونجد أن هناك سهمين لهما إتجاه معاكس للسهم الجديد هما السهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة B نحو الدائرة التي تمثل المنطقة F ويحمل شحنة بـ 170 طن، والسهم المتجه من الدائرة التي تمثل الوحدة C نحو الدائرة التي تمثل المنطقة D ويحمل شحنة بـ 230 طن، وبالتالي فإن أقل شحنة هي 170 طن والتي يحملها السهم الأول.

- نضع كمية الشحنة المتحصل عليها في الخطوة السابقة ضمن السهم الجديد، وهذا يعني أن الوحدة B تموّن المنطقة D بـ 170 طن، ثم نقوم بإضافة نفس الكمية إلى الأسهم التي لها نفس إتجاه السهم الجديد، ونطرحها من الأسهم التي لها إتجاه معاكس للسهم الجديد وهذا بالنسبة للأسهم الموجودة ضمن السلسلة، أما باقي الأسهم خارج السلسلة فتبقى بدون تغيير.

وشبكة النقل التالية تمثل خطة التوزيع الثانية:

خطة التوزيع الثانية



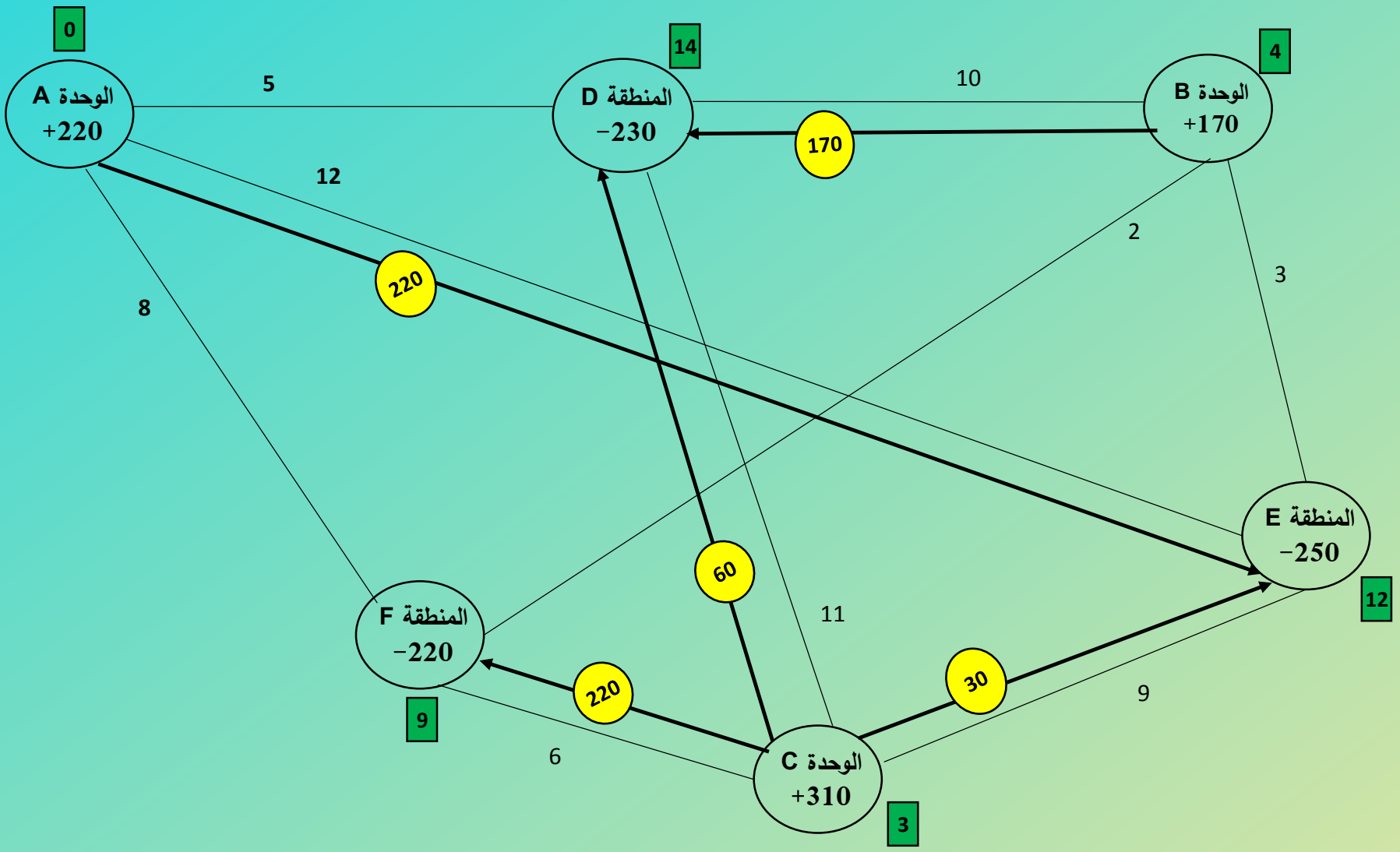
حساب قيمة الربح الكلي:

$Z_{max} = (220 \times 12) + (60 \times 11) + (170 \times 10) + (30 \times 9) + (220 \times 6) = 6590$ وحدة نقدية

ويُلاحظ إرتفاع في قيمة الربح الكلي بـ 510 وحدة نقدية.

وبعد الحصول على خطة التوزيع الثانية، نقوم باختبارها لمعرفة ما إذا كانت مثلى أو لا باتباع نفس الخطوات التي تم شرحها سابقاً، حيث نحسب قيم فرضيات خطة التوزيع الثانية عند كل دائرة. لنفترض القيمة 12 كقيمة فرضية الدائرة التي تمثل المنطقة E.

خطة التوزيع الثانية



نحسب قيم σ_{ij} كما يلي:

$$\sigma_{AD} = 5 - (14 - 0) = -9$$
$$\sigma_{AF} = 8 - (9 - 0) = -1$$
$$\sigma_{BF} = 2 - (9 - 4) = -3$$
$$\sigma_{BE} = 3 - (12 - 4) = -5$$

ويُلاحظ أنه لا توجد أية قيمة موجبة لـ σ_{ij}، وبالتالي فخطة التوزيع الثانية هي خطة التوزيع المثلى.

إذا:

- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة E بـ 220 طن.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة D بـ 170 طن.
- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة D بـ 60 طن.
  - المنطقة E بـ 30 طن.
  - المنطقة F بـ 220 طن.

والربح الكلي المتحقق من عملية التوزيع من الوحدات الثلاثة نحو المناطق الثلاثة هي 6590 وحدة نقدية.

ملاحظات:

– عند تساوي أكبر ربحين وحدويين أو أكثر، فإننا نختار الربح الوحدوي على المسار الذي يُمكن إمرار أكبر شحنة عبره؛

– عند تساوي أكبر قيمتين موجبتين (أو أكثر) عند حساب قيم σ_{ij}، فإنه يتم المفاضلة بينهما على أساس أكبر شحنة يمكن أن يحملها السهم الجديد في كل سلسلة؛

– عند الوصول إلى خطة التوزيع المثلى سواء كان الهدف تعظيم أو تدنية، إذا كانت إحدى قيم σ_{ij} أو أكثر تساوي الصفر، فهذا يعني أن هناك أكثر من خطة توزيع مثلى تعطي كلها نفس قيمة دالة الهدف.

3-3- حالات خاصة:

أ- عدم تحقق شرط تساوي العرض والطلب:

إن التوازن بين العرض والطلب هو شرط لحل مسائل النقل، إلّا أنّه في الحياة العملية قلما يتحقق هذا الشرط، وهو ما يستدعي تعديل هذه المسائل لخلق التوازن من خلال إضافة منابع وهمية أو مصاب وهمية حسب الحالة كما يلي:

أ-1- الطلب أكبر من العرض:

يتم في هذه الحالة إضافة منبع وهمي، والكمية التي يعرضها هذا المنبع هي قيمة الفرق بين مجموع الطلب ومجموع العرض، وتكاليف النقل أو أرباح النقل من هذا المنبع إلى أي مصب فنفترضها تكاليف أو أرباح صفرية، كما نفترض أن هذا المنبع الوهمي يُمكن أن يموّن جميع المناطق.

أ-2- العرض أكبر من الطلب:

يتم في هذه الحالة إضافة مصب وهمي، والكمية التي يطلبها هذا المصب هي قيمة الفرق بين مجموع العرض ومجموع الطلب، وتكاليف النقل أو أرباح النقل من أي منبع إلى هذا المصب فنفترضها تكاليف أو أرباح صفرية، كما نفترض أن هذا المصب يُمكن أن يتلقى شحنة من أيّ منبع.

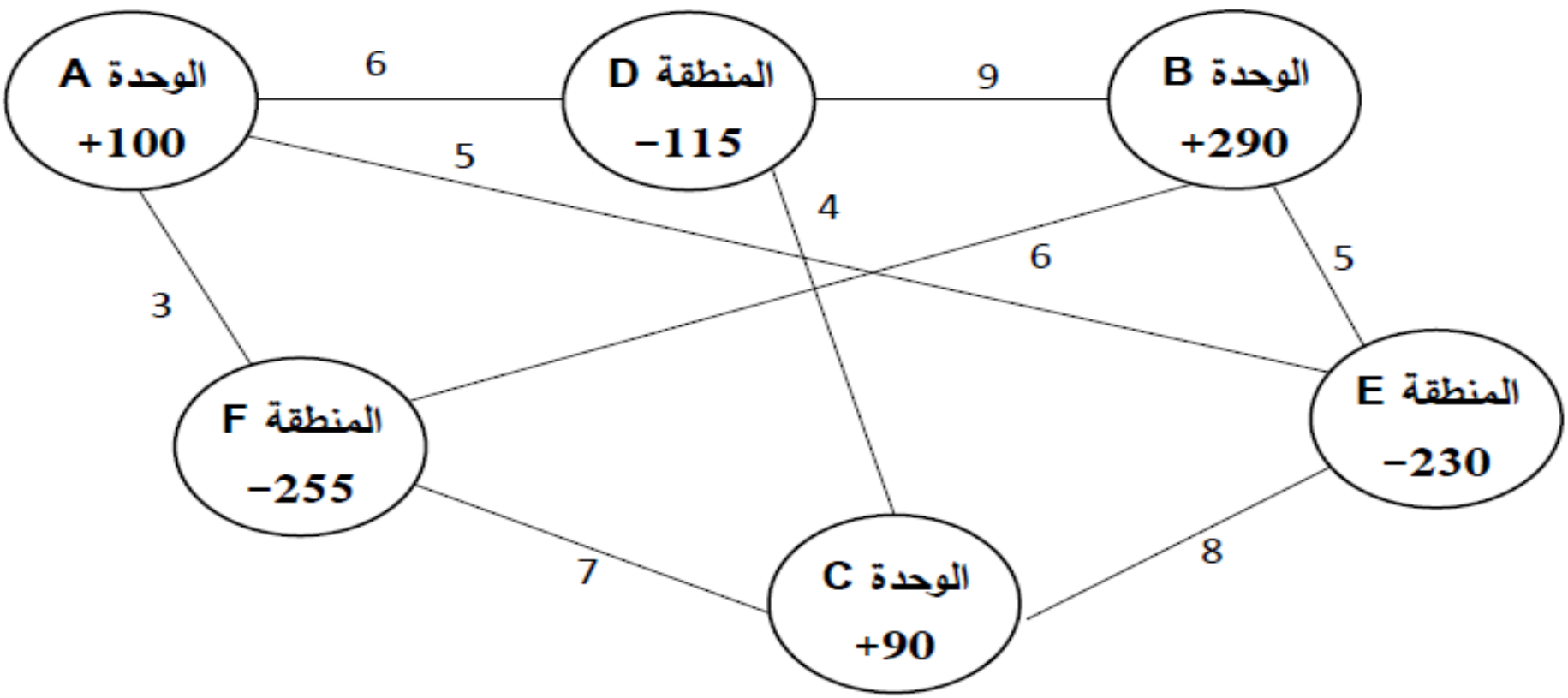
وبعد تحقيق شرط التوزان بين العرض والطلب، يتم حل مسألة النقل بشكل عادي على الشبكة، وعند الوصول إلى خطة التوزيع المثلى يتم إهمال الكميات المنقولة من المصدر الوهمي، أو الكميات التي تحصلت عليها المصاب الوهمية.

ب- حالة التفكك (الدورانية):

تقع هذه الحالة عندما يكون عدد الأسهم التي تحمل الشحنات أقل من عدد الدوائر ناقص واحد، وفي هذه الحالة يتم إضافة سهم أو أكثر حتى يتحقق شرط مساواة عدد الأسهم بعدد الدوائر ناقص واحد، مع إفتراض أن كمية الشحنة التي يحملها السهم المُضاف قيمتها صفر. ويُمكن أن تقع حالة التفكك في خطة التوزيع الأولى أو خطط التوزيع الموالية. ففيما يتعلق بخطة التوزيع الأولى، تحدث حالة التفكك عندما تتم عملية توزيع البضاعة من المنابع نحو المصاب وينتج لنا عدد أسهم أقل من عدد الدوائر ناقص واحد، أما في خطط التوزيع الموالية، تحدث حالة التفكك عندما يكون هناك سهمين أو أكثر لهما إتجاه معاكس للسهم الجديد ضمن السلسلة التي تغلق هذا السهم تحمل نفس أصغر شحنة.

مثال 3: (حول الحالة الخاصة الأولى):

ليكن لديك شبك النقل التالية: (الوحدة من الكميات: طن، الوحدة من التكاليف الوحدوية: وحدة نقدية)

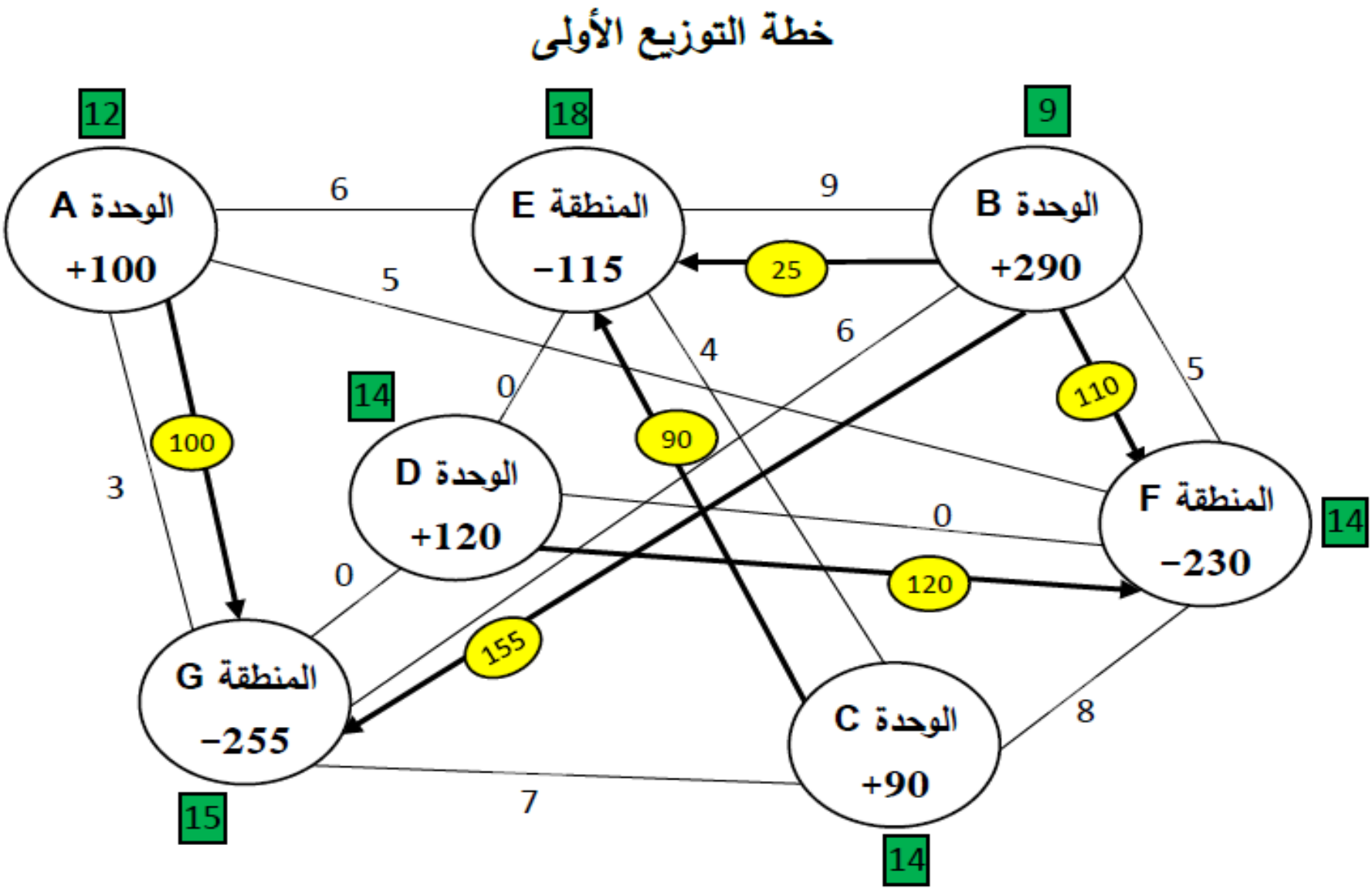


المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تُحقق أقل تكلفة كلية باستخدام الشبكات؟

الحل:

يُلاحظ أن الكمية المطلوبة من المناطق الثلاثة تتجاوز كمية ما تعرضه الوحدات الثلاثة. ولتحقيق التوازن بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة يتم إضافة وحدة وهمية نرمز لها بـ D، طاقة عرضها هي 120 طن (الفرق بين كمية الطلب وكمية العرض)، وتكاليف الشحن الوحدوية منها نحو مختلف المناطق هي تكاليف صفرية. ونقوم أيضا بإعادة ترميز المناطق على الترتيب بـ E، F وG.

ويكون حل المسألة كما يلي:



التكلفة الكلية: 2365 وحدة نقدية.

$\sigma_{AE} = 6 - (18 - 12) = 0$

$\sigma_{AF} = 5 - (14 - 12) = 3$

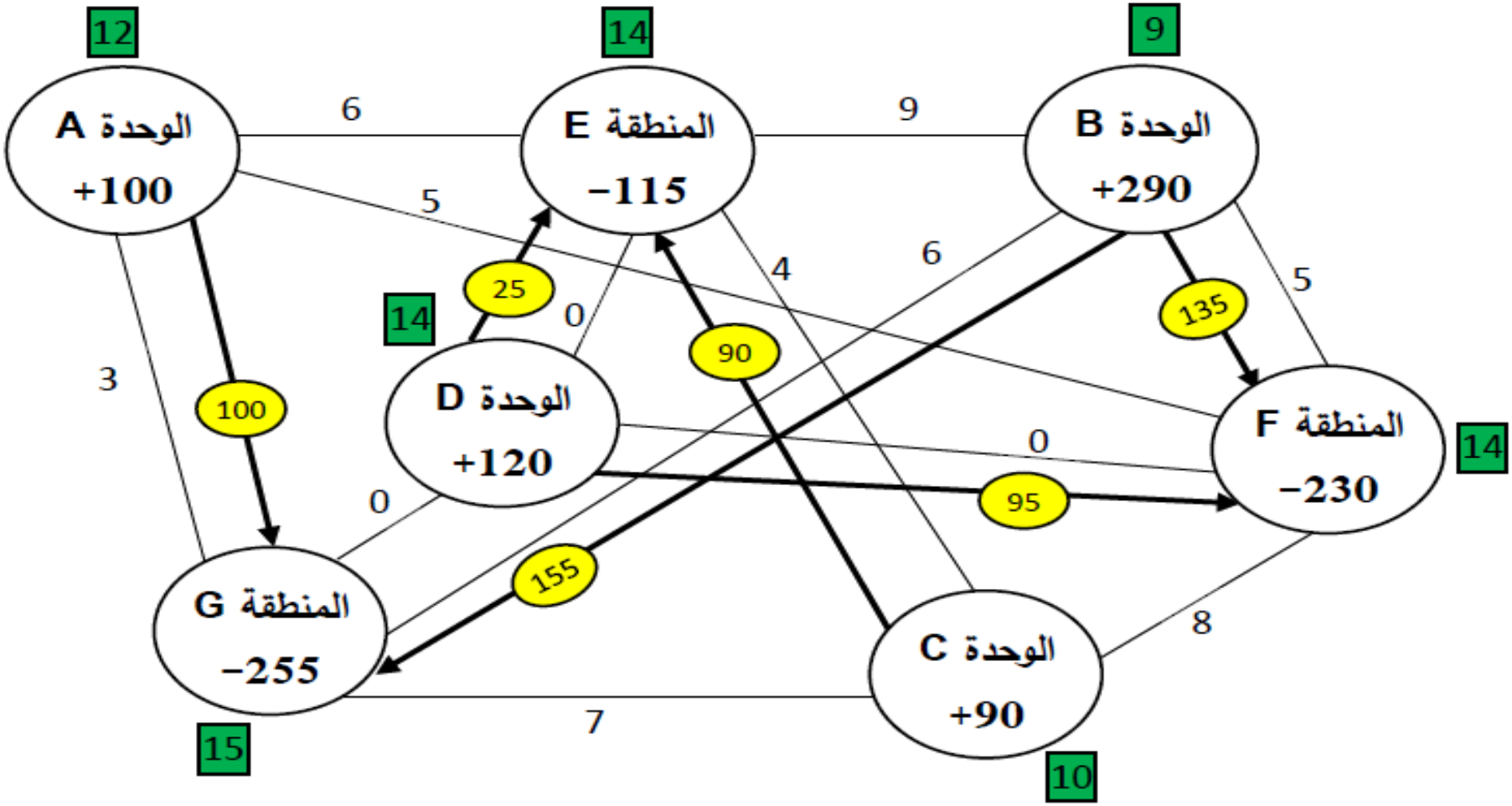
$\sigma_{CF} = 8 - (14 - 14) = 8$

$\sigma_{CG} = 7 - (15 - 14) = 6$

$\sigma_{DE} = 0 - (18 - 14) = \mathbf{-4}$

$\sigma_{DG} = 0 - (15 - 14) = -1$

خطة التوزيع الثانية



التكلفة الكلية: 2265 وحدة نقدية.

$\sigma_{AE} = 6 - (14 - 12) = 4$

$\sigma_{AF} = 5 - (14 - 12) = 3$

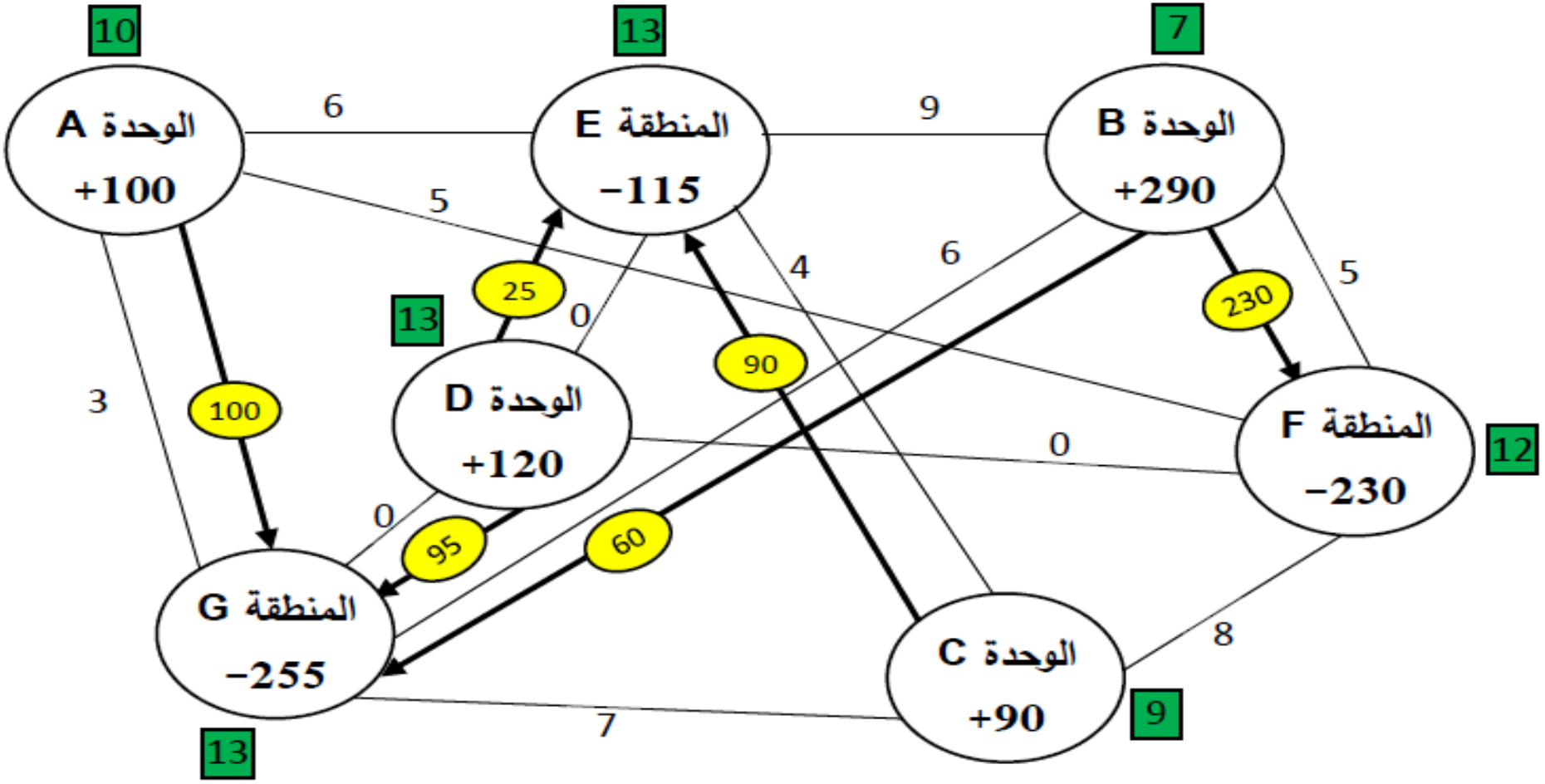
$\sigma_{CF} = 8 - (14 - 10) = 4$

$\sigma_{CG} = 7 - (15 - 10) = 2$

$\sigma_{BE} = 9 - (14 - 9) = 4$

$\sigma_{DG} = 0 - (15 - 14) = \mathbf{-1}$

خطة التوزيع الثالثة



التكلفة الكلية: 2170 وحدة نقدية.

$\sigma_{AE} = 6 - (13 - 10) = 3$

$\sigma_{AF} = 5 - (12 - 10) = 3$

$\sigma_{CF} = 8 - (12 - 9) = 5$

$\sigma_{CG} = 7 - (13 - 9) = 3$

$\sigma_{BE} = 9 - (13 - 7) = 3$

$\sigma_{DF} = 0 - (12 - 13) = 1$

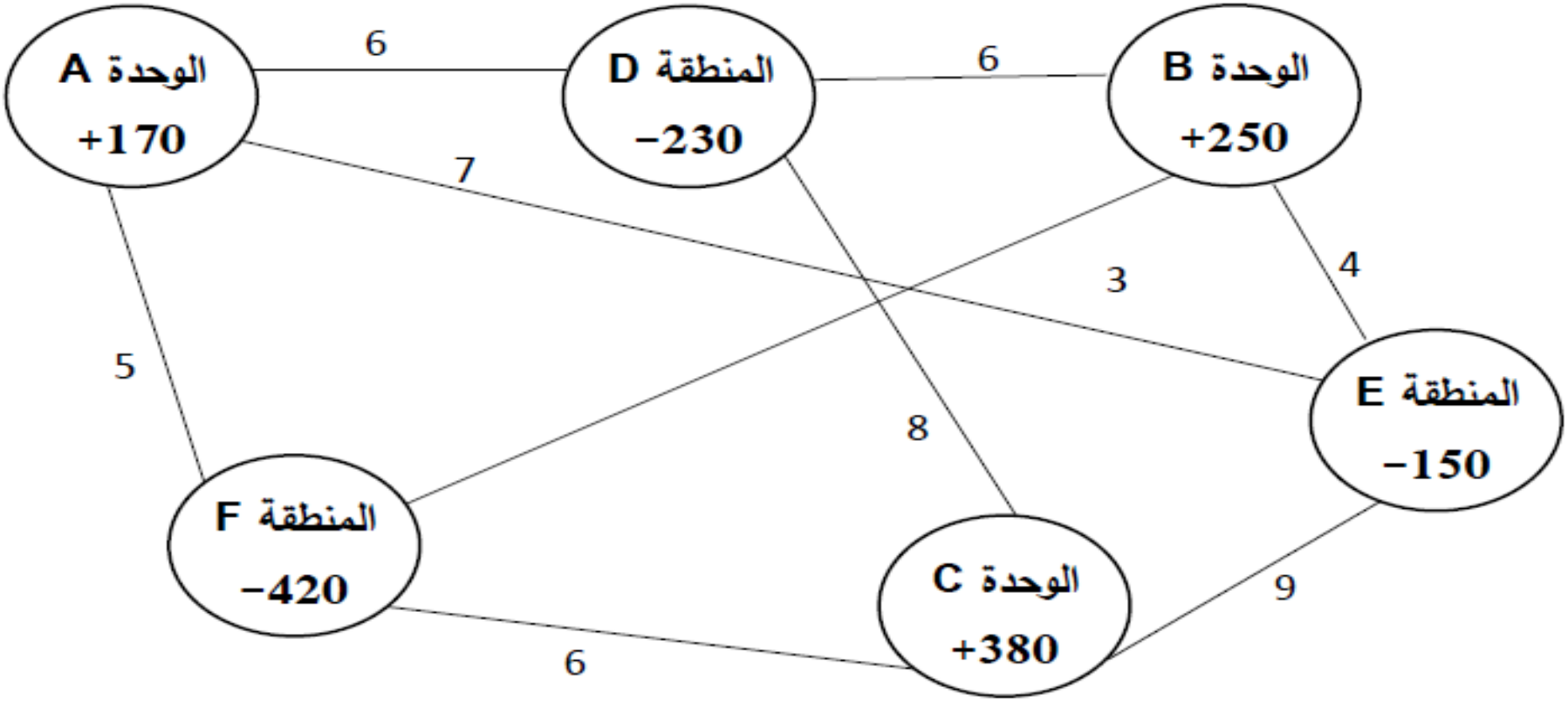
وعليه، فخطة التوزيع الثالثة هي الخطة المثلى. وبما أن الوحدة D هي وحدة وهمية، فإن تموينها لكل من المنطقتين E وG هو تموين وهمي، وبالتالي فإن الكميات التي موّنت بها الوحدة D المنطقتين E وG وهي 25 طن و95 طن على التوالي تُعتبر عجز بالنسبة للمنطقتين. وتتمثل خطة التوزيع الحقيقية فيما يلي:

- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة G بـ 100 طن.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة F بـ 230 طن.
  - المنطقة G بـ 60 طن.
- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة E بـ 90 طن.

والتكلفة الكلية المترتبة عن عملية التوزيع من الوحدات الثلاثة نحو المناطق الثلاثة هي 2170 وحدة نقدية.

مثال 4: (حول الحالة الخاصة الثانية):

ليكن لديك شبكة النقل التالية: (الوحدة من الكميات: طن، الوحدة من الأرباح الوحدوية: وحدة نقدية)



المطلوب: أوجد خطة التوزيع التي تُحقق أعظم ربح كلي باستخدام الشبكات؟

الحل:

يُلاحظ أنّه بعد إتمام عملية التوزيع من الوحدات إلى المناطق نتج عن هذه العملية 4 أسهم فقط (4 شحنات)، ما يعني عدم توفر شرط أن يكون عدد الأسهم هو بعدد الدوائر ناقص واحد. وينبغي في هذه الحالة وضع سهم يحمل شحنة وهمية قيمتها صفر حتى يتحقق الشرط المذكور. وهناك العديد من المسارات التي يُمكن إمرار عبرها شحنة وهمية. وبالرغم من أنّه يُمكن إختيار أي مسار، إلّا أنّه يُمكن المفاضلة بين هذه المسارات لتقليص عدد خطط التوزيع، والوصول بشكل أسرع لخطة التوزيع المثلى. وتتم عملية المفاضلة بوضع السهم الجديد كل مرة على إحدى المسارات، وحساب قيم σ_{ij}، ثم تحديد أقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد وحساب قيمة الزيادة الممكنة في الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية كما يلي:

- المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة A بالدائرة التي تمثل المنطقة D: سنجد أن أكبر قيمة موجبة لـ σ_{ij} هي $\sigma_{BD}=2$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 0. وضع السهم الجديد على هذا المسار سوف لن يغير من قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية، إلّا أن الإستمرار في الحل سيوصلنا إلى خطة التوزيع المثلى.

- المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة A بالدائرة التي تمثل المنطقة E: سنجد أن أكبر قيمة موجبة لـ σ_{ij} هي $\sigma_{BD}=2$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 0. وضع السهم الجديد على هذا المسار سوف لن يغير من قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية، إلّا أن الإستمرار في الحل سيوصلنا إلى خطة التوزيع المثلى.

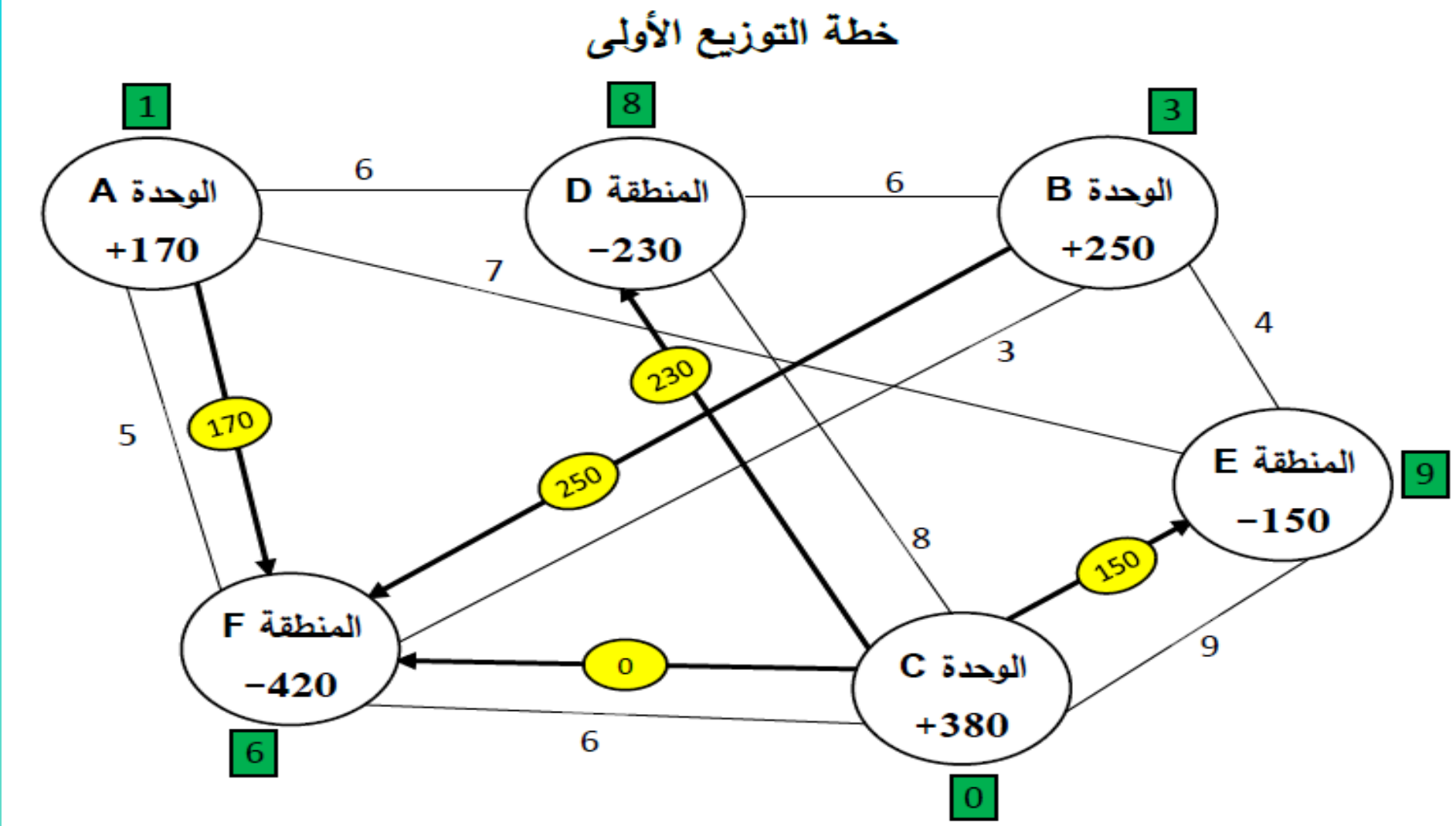
- المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة B بالدائرة التي تمثل المنطقة D: سنجد أن أكبر قيمة لـ σ_{ij} هي $\sigma_{CF}=1$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 230 طن. وضع السهم الجديد على هذا المسار سيؤدي إلى إرتفاع قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية بـ 230 وحدة نقدية (1x230).

– المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة B بالدائرة التي تمثل المنطقة E: سنجد أن أكبر قيمة موجبة لـ σ_{ij} هي $\sigma_{BD}=3$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 0. وضع السهم الجديد على هذا المسار سوف لن يغير من قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية، إلّا أن الإستمرار في الحل سيوصلنا إلى خطة التوزيع المثلى.

– المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة C بالدائرة التي تمثل المنطقة F: سنجد أن أكبر قيمة لـ σ_{ij} هي $\sigma_{BD}=1$، وأقل شحنة تحملها الأسهم المعاكسة للسهم الجديد على السلسلة هي 230 طن. وضع السهم الجديد على هذا المسار سيؤدي إلى إرتفاع قيمة الربح الكلي في خطة التوزيع الثانية بـ 230 وحدة نقدية (1x230).

ومما سبق يتضح أنه يُمكن إختيار إما المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة B بالدائرة التي تمثل المنطقة D، أو المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة C بالدائرة التي تمثل المنطقة F، لأن وضع السهم الجديد في أي من المسارين سيؤدي إلى إرتفاع قيمة الربح الكلي بـ 230 وحدة نقدية في خطة التوزيع الثانية.

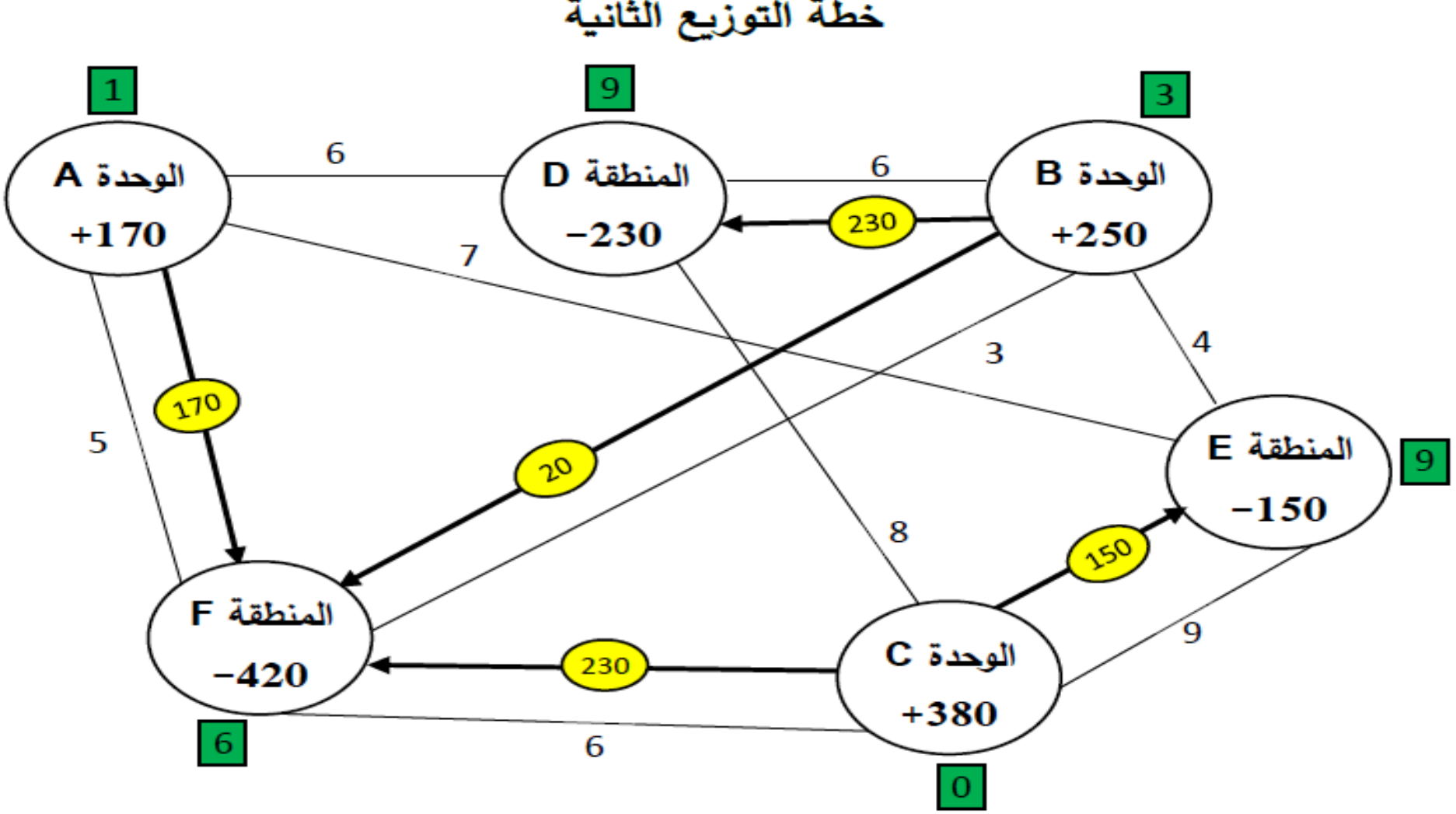
سنختار وضع السهم الذي يحمل الشحنة الوهمية التي قيمتها 0 في المسار الذي يربط الدائرة التي تمثل الوحدة C بالدائرة التي تمثل المنطقة F.



الربح الكلي: 4790 وحدة نقدية.

$\sigma_{AD} = 6 - (8 - 1) = -1$ $\sigma_{BD} = 6 - (8 - 3) = \mathbf{1}$

$\sigma_{AE} = 7 - (9 - 1) = -1$ $\sigma_{BE} = 4 - (9 - 3) = -2$



الربح الكلي: 5020 وحدة نقدية.

$\sigma_{AD} = 6 - (9 - 1) = -2$

$\sigma_{BE} = 4 - (9 - 3) = -2$

$\sigma_{AE} = 7 - (9 - 1) = -1$

$\sigma_{CD} = 8 - (9 - 0) = -1$

وعليه، فخطة التوزيع الثانية هي الخطة المثلى، حيث:

- **الوحدة A تموّن:**
  - المنطقة F بـ 170 طن.
- **الوحدة B تموّن:**
  - المنطقة D بـ 230 طن.
  - المنطقة F بـ 20 طن.
- **الوحدة C تموّن:**
  - المنطقة E بـ 150 طن.
  - المنطقة F بـ 230 طن.

والربح الكلي المتحقق من عملية التوزيع من الوحدات الثلاثة نحو المناطق الثلاثة هو 5020 وحدة نقدية.