

Chapitre V : Diagramme de Bode et lieu de Nyquist des systèmes asservis

3. Réponse fréquentielle des systèmes linéaires :

L'étude de la réponse en fréquence concerne l'étude de la réponse du système lorsqu'il est soumis aux entrées sinusoïdales de fréquences différentes. La réponse en fréquences peut être regardée de deux manières : par l'intermédiaire du diagramme de Bode ou diagramme de Nyquist.

3.1 Diagramme de BODE:

Le diagramme de Bode permet d'étudier la réponse en fréquences d'un système linéaire de fonction de transfert $G(p)$. Pour ce faire, on remplace p par $j\omega$, ce qui permet d'écrire la fonction de transfert sous la forme suivante: $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$. Dans cette expression, on considère le module $A(\omega)$ et l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction complexe paramétrée par la pulsation ω . Le diagramme de Bode est obtenu en traçant (asymptotiquement) les fonctions suivantes de $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sur des échelles logarithmiques en abscisse ω (Figure 4.6)

$$A|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(G(j\omega)) \quad (4.27)$$

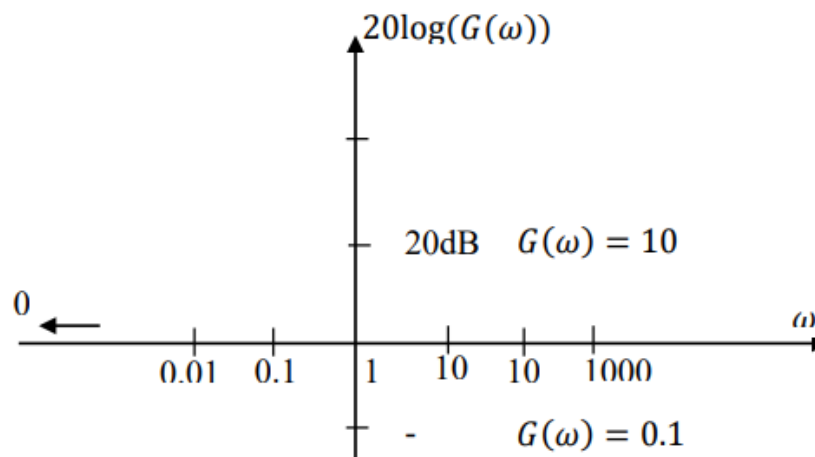


Figure 4.6 : Echelle logarithmique du diagramme de Bode

On notera que l'un des avantages du diagramme de Bode est que le diagramme global est la somme algébrique des digrammes partiels. On donnera quelques exemples de tracés des courbes de Bode.

3.1.1 Exemple 1

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte : $G(p) = p$ (4.28)

Pour étudier la réponse en fréquences de ce système, on remplace $p = j\omega$,

D'où : $G(j\omega) = j\omega$ (4.29)

Pour utiliser la représentation de Bode, on cherche les expressions du gain et de la phase de la fonction de transfert.

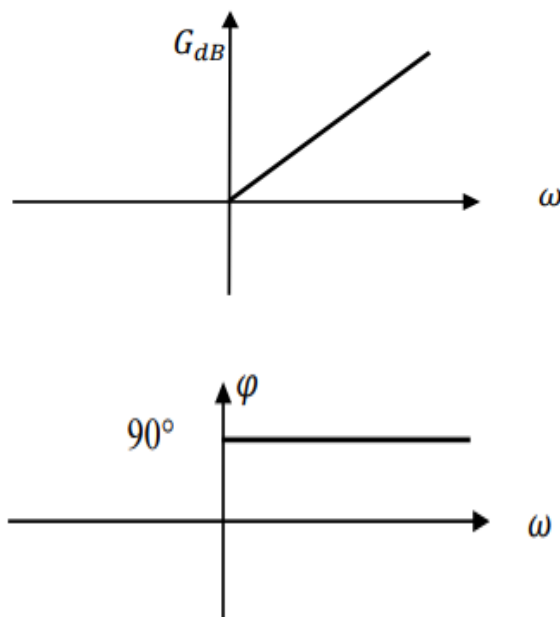
Le gain est : $G|_{dB} = 20\log_{10}|j\omega|$ (4.30)

D'où : $G|_{dB} = 20\log_{10}\omega$ (4.31)

C'est cette courbe qu'il faut tracer asymptotiquement. Il s'agit d'une droite de pente égale à : +20dB/décade (décade=[ω 10 ω])

La phase est : $\varphi = \arg\left(\frac{\omega}{0}\right) = \arg(\infty) = \frac{\pi}{2}$, elle est constante (90°). (4.32)

La courbe asymptotique est donnée par la figure 4.7



3.1.2 Exemple 2

On considère le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{1+\tau p} \quad (4.33)$$

τ est une constante positive (la constante de temps).

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega} \quad (4.34)$$

Le gain en dB

$$G_{dB} = -20\log_{10}(1 + \tau^2\omega^2)^{1/2} = -10\log_{10}(1 + \tau^2\omega^2) \quad (4.35)$$

Et la phase : $\varphi = -\arctan(\tau\omega)$ (4.36)

Le diagramme asymptotique est obtenu par le raisonnement suivant. On étudie le gain aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Les basses et hautes fréquences sont déterminées par rapport à une fréquence de coupure ω_c qui est définie par : $\tau\omega_c = 1$.

--Si $\omega \ll \omega_c$, le gain en basses fréquences est : $G_{dB} = -10\log_{10}(1) = 0dB$. Donc en basse fréquences : de $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \omega_c$ le gain en décibel est nul.

--Si $\omega \gg \omega_c$, le gain en hautes fréquences est : $G_{dB} = -20 \cdot \log_{10}(\tau \cdot \omega)$. Donc en hautes fréquences : de $\omega = \omega_c$ jusqu'à $\omega = \infty$, le gain est asymptotiquement linéaire.

De même, pour le déphasage,

--Si $\omega \ll \omega_c$, le déphasage en basses fréquences est : $\varphi = -\arg(0) = 0^\circ$. Donc en basse fréquences : de $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \omega_c$, le déphasage en décibel est pratiquement nul.

--Si $\omega \gg \omega_c$, le déphasage en hautes fréquences est : $\varphi = -\arg(\infty) = -90^\circ$. Donc en hautes fréquences : de $\omega = \omega_c$ jusqu'à $\omega = \infty$, le déphasage est asymptotiquement égale à 90° .

Ayant déterminé le comportement asymptotique, il reste à préciser les valeurs du gain et du déphasage au voisinage de la fréquence de coupure. Ceci est obtenu en posant $\omega = \omega_c$. On en déduit le gain qui vaut -3 dB.

$$G(\omega=\omega_c) = -20\log_{10}(1+\tau^2\omega_c^2)^{1/2} = 20 \cdot \log_{10}(2) = -3dB \quad (4.37)$$

Pour le déphasage à la fréquence de coupure, on a : $\varphi = -\arg(\tau\omega_c) = -\arg(1) = -45^\circ$. (4.38)

Le diagramme de Bode Asymptotique est donné par la figure

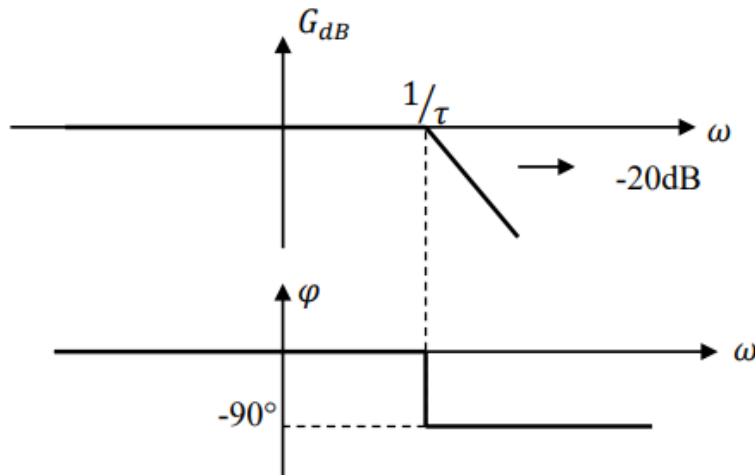


Figure 4.7 : Diagramme de Bode asymptotique d'un système du premier ordre

3.1.3 Exemple 3 : Système du second ordre :

Soit le système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$ avec $0 < \xi < 1$ (4.39)

On a déjà déterminé les expressions du gain et du déphasage qui sont :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{((1 - \omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2)}} \quad \text{et} \quad \Phi(\omega) = -\frac{2\xi\omega_n}{(1 - \omega_n^2)} \quad (4.40)$$

- Comportement asymptotique

L'expression du gain est : $G_{dB} = -20 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2}$ (4.41)

--En basses fréquences, $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$, $G_{dB} \cong -20 \log_{10}(1) \approx 0$. L'asymptote en basse fréquences est nulle.

--En hautes fréquences, $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$, $G_{dB} \approx -40 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$; L'asymptote en hautes fréquences est une pente de -40 dB/ décade.

--Si la pulsation du signal d'entrée est ω_c , alors $\frac{\omega_c}{\omega_n} = 1$; le gain est : $G = -20 \log_{10}[(2\xi)^2]^{1/2}$.

Ce gain pour la fréquence de coupure dépend du coefficient d'amortissement. Si on suppose $\xi = 1$, le gain est de -6dB.

On effectue un raisonnement analogue pour déterminer le diagramme asymptotique du déphasage.

$$\Phi(\omega) = -\arg\left(\frac{2\xi\omega_n}{1-\omega_n^2}\right) \quad (4.41)$$

--En basses fréquences, $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$, $\Phi \approx 0$. l'asymptote en basse fréquences est nulle.

--En hautes fréquences, $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$, $\Phi(\omega) = -\arg\left(\frac{2\xi\omega_x}{1-\omega_x^2}\right) \approx -\arg\left(\frac{1}{\infty}\right) \approx -\arg(0) = -180^\circ$;

L'asymptote en hautes fréquences est une droite horizontale à -90° .

--Si la pulsation du signal d'entrée est ω_c , alors $\frac{\omega_c}{\omega_n} = 1$; le déphasage est :

$$\Phi(\omega_c) = -\arg(\infty) = -90^\circ$$

Le diagramme de Bode (amplitude et phase) est donné pour $F(p) = \frac{1}{p^2 + 0,5p + 1}$ dans la

figure 4.8.

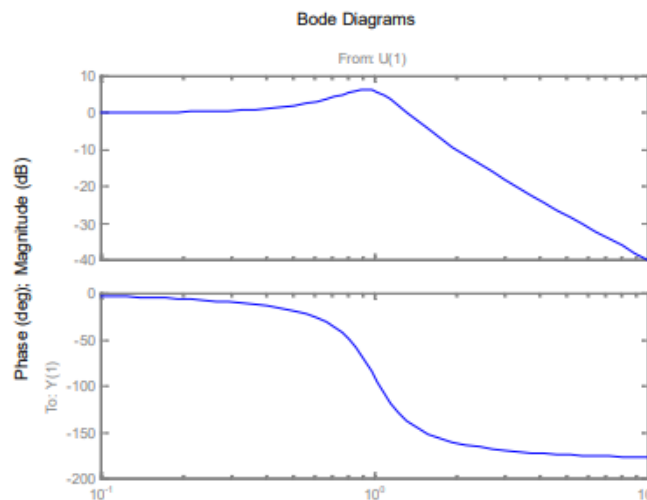


Figure 4.8 : courbes de Bode d'un système du second ordre

a--La pulsation de résonance est celle qui coupe l'axe (0dB) à la pulsation :

$\omega = \omega_{\text{résonance}}$

$$G|_{dB} = -20 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.42)$$

Dérivant $G|_{dB}$ pour $\omega = \omega_R$:

$$\frac{dG|_{dB}}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad \text{si } 2\xi^2 < 1 \quad \text{ou bien } \xi < 0.7 \quad (4.43)$$

si ξ très petit : $\omega_R \approx \omega_n$ et

$$\text{Cas de } G|_{dB} \text{ Max} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_R^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega_R}{\omega_n}} ; \quad (4.44)$$

$$\text{Si } \xi < 0.7; \text{ le module A passe par un Max, } G|_{dB} \text{ max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (4.45)$$

$$\text{Ce maximum est obtenu par : } \omega = \omega_R = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} . \quad (4.46)$$

$$\text{Le facteur de résonance ou facteur de surtension: } Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} . \quad (4.47)$$

Diagramme de Bode avec Matlab

On peut utiliser la fonction Bode de Matlab en donnant directement le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert. Par exemple :

$$F(p) = \frac{50}{p^3 + 9p^2 + 30p + 40}$$

L'expression de Bode est : Bode (50,[1 9 30 40]) donne le diagramme de Bode de la FT (amplitude et phase):

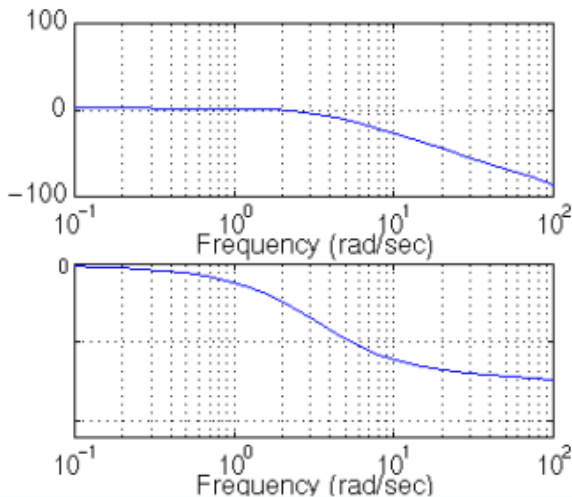


Figure 4.9 : courbes de Bode d'un système du second ordre par

La fréquence est représentée sur une échelle logarithmique, la phase est donnée en degrés, et l'amplitude en décibels.

3.2 Lieu et diagramme de NYQUIST

Les courbes de gain et de phase ne constituent pas la seule représentation possible du comportement harmonique d'un système de fonction de transfert $G(p)$. Il existe une autre représentation qui consiste à décomposer la fonction de transfert en sa partie réelle et imaginaire

$$G(\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega) \quad (4.48)$$

Cette formulation est exploitée par Nyquist pour représenter la réponse harmonique d'un système donnée par sa fonction de transfert, il s'agit du tracé de la courbe polaire des points M de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. Cette courbe s'appelle le lieu de Nyquist ou lieu polaire. (Figure 4.9)

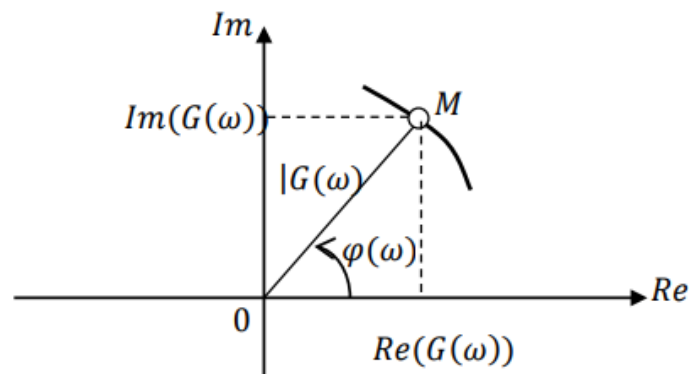


Figure 4.10 : Définition du diagramme de Nyquist

Exemple1 :

Soit le système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{1}{p+1}$

Pour établir le lieu de Nyquist, on remplace p par $j\omega$ dans $G(p)$ et on décompose $G(j\omega)$ en une partie réelle et une partie imaginaire.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \rightarrow Re(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \quad \text{et} \quad Im(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

Le lieu de Nyquist est obtenu pour différentes valeurs de ω de 0 jusqu'à l'infini. On se contente d'une étude asymptotique et de la détermination de quelques points remarquables.

$$\omega \rightarrow 0 \quad \begin{cases} Re \rightarrow 1 \\ Im \rightarrow 0 \end{cases} \quad ; \quad \omega \rightarrow \infty \quad \begin{cases} Re \rightarrow 0 \\ Im \rightarrow 0 \end{cases} \quad ; \quad \omega \rightarrow 1 \quad \begin{cases} Re \rightarrow \frac{1}{2} \\ Im \rightarrow \frac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient le tracé du lieu de Nyquist donné par la figure (4.11)

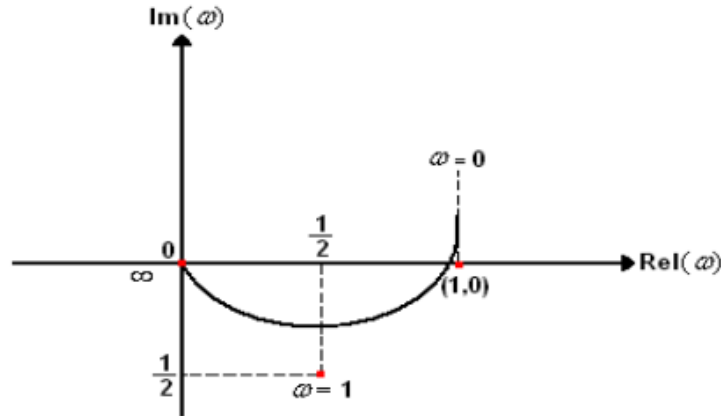


Figure 4.11 : Tracé de Nyquist de la FT $G(p) = \frac{1}{p+1}$

Exemple 2

Soit le système de FT : $H(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$

Pour établir le lieu de Nyquist, on remplace p par $j\omega$ dans $H(p)$ et on décompose $H(j\omega)$ en une partie réelle et une partie imaginaire comme suit.

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(j\omega+2)} = \frac{1}{(j\omega+2-\omega^2+2j\omega)} = \frac{2-\omega^2-3j\omega}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

$$\text{d'ou : } \text{Rel}(\omega) = \frac{2-\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} \quad \text{et} \quad \text{Im}(\omega) = \frac{-3\omega}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

On détermine quelques points caractéristiques pour tracer le lieu de Nyquist :

$$\text{Pour } \omega \rightarrow 0, \text{ on a : } \text{Rel}(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \text{Im}(0) = 0$$

$$\text{Pour } \omega \rightarrow \infty, \text{ on a : } \text{Rel}(\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\infty) = 0$$

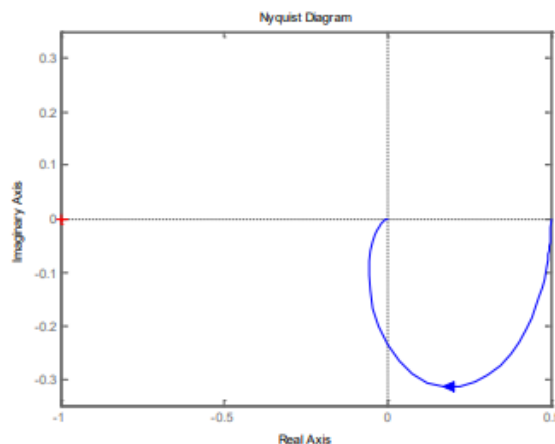


Figure 4.12 : Tracé de Nyquist de la FT $G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$ par Matlab