Université Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique

$2022-2023$

Algèbre 3

Série no 4 : Trigonalisation et application

Exercice 1. *Soit A_a la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A_a et donner l'ensemble des valeurs propres.*
2. *Pour quelles valeurs de a, la matrice A_a est-elle diagonalisable ?*
3. *On suppose que $a = -1$.*
   - *Diagonaliser la matrice A_{-1}.*
   - *Résoudre le système différentiel $X_0(t) = A_{-1}X(t)$.*
4. *On suppose que $a = 1$. Trigonaliser A_1.*

Exercice 2. *Jordaniser la matrice suivante :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Calculer l'ensemble des valeurs propres.*
2. *Trouver la matrice de passage P et la matrice de Jordan J tel que :* $A = PJP^{-1}$.

Exercice 4. *Soit la matrice* $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & -k \\ -1 & k+1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A_k et en déduire le spectre de A_k.*
2. *Montrer, sans calcul d'espace propre, que la matrice A_1 n'est pas diagonalisable.*
3. *Trigonaliser A_1 puis exprimer A_1^n en fonction de n.*

Exercice 5. *Résoudre le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2z(t), \\ y'(t) = x(t) - 2y(t), \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t). \end{cases}$$