Chapitre 05 : Fonctions élémentaires.

5.1 Fonction puissance entières $n \in \mathbb{N}$:

Commençons par rappeler la définition de la puissance entière d'un nombre réel a.

Déf. (puissance entière).

Soient a un réel non nul et n un entier naturel. La puissance n-ième de a est définie par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

Notons que si $n = 0$, alors $a^0 = 1$.

propriété ; (Opérations puissances entières) :

Soient a, b des nombres réels et n, p deux entiers naturels.

On a les propriétés suivantes :

$$a^n a^p = a^{n+p} \quad , \quad (a^n)^p = a^{n.p} \quad , \quad a^n b^n = (ab)^n .$$

et si en plus b est non nul :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{et} \quad b^n = \frac{1}{b^{-n}} .$$

* La fonction puissance entière peut donc être définie de la façon suivante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^n$$

Remarque :

1) Si $n=0$, on retrouve la fonction constante.
2) si $n=1$, on retrouve la fonction identité.
3) si n est paire, la fonction f est paire.
4) si n est impaire, la fonction f est impaire.
5) si n est un entier négatif, il faut bien faire attention au domaine de définition qui devient $D_f = \mathbb{R}^*$.
6) si $n=-1$ on retrouve la fonction inverse classique:

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$x \longmapsto x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

5.2/ Fonction logarithme népérien:

La fonction logarithme népérien (notée ln). Cette fonction peut être construite de plusieurs façon:

* comme étant une primitive de la ~~fon~~ fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ (c'est même en fait l'intégrale entre 1 et x de la fonction inverse).
* comme la réciproque de la fonction exponentielle.

La fonction ln est définie de la façon suivante:

$$\ln : \mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(x)$$

Propriété:

1/ il existe un nombre $e \simeq 2{,}71828$ tel que $\ln(e) = 1$.

2/ Soient a et b deux réels strictement positifs, alors:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

cette dernière égalité nous permet d'ailleurs de déduire (en posant $a = b$) que $\ln(1) = 0$.

3/ Soient n un entier naturel non nul, et a un réel strictement positif, on a alors:

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \quad \text{et} \quad \ln(a^{-n}) = -n\ln(a).$$

Propriété:

soit x réel strictement positif:

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et,}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0, \; p \in \mathbb{R}_+^*$$

Définition: (Logarithme de base a):

Soient a un réel strictement positif. pour tout réel x strictement positif, on définit son logarithme de base a noté $\log_a(x)$ par:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

5.3/ Fonction exponentielle :

C'est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est définie comme suit :

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto e^x$$

Propriété :

1/ Pour tout réels a et b :

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad \text{et} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

2/ pour tout réel a et pour tout entier naturel n :

$$(e^a)^n = e^{na} \quad , \quad (e^a)^{-n} = \frac{1}{e^{an}}.$$

3/ pour tout réel strictement positif a et pour tout réel b :

$$e^{\ln a} = a, \quad \ln(e^a) = a \quad \text{et} \quad e^{b \ln a} = a^b.$$

Propriété : (Limites et exponentielles) :

Soit x réel, on a alors les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(1+a)^x}{x} = e^a, a \in \mathbb{R}$$

Soit a un réel strictement positif, et soit b un réel quelconque. On a alors les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{-a}} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$$

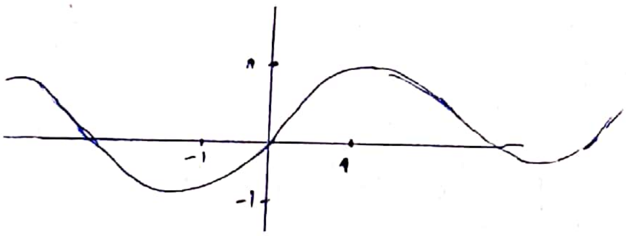
$$\lim_{x \to 0^+} x^a (\ln(x))^b = 0$$

4/ Fonctions circulaires (ou trigonométriques):

5.4.1/ Fonction sinus:

La fonction sinus est définie de la façon suivantes

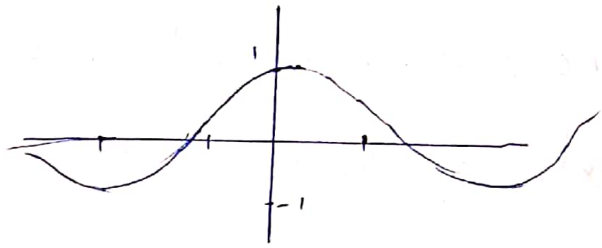
$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \sin(x).$$



5.4.2/ Fonction Cosinus:

La fonction cosinus est définie de la façon suivante:

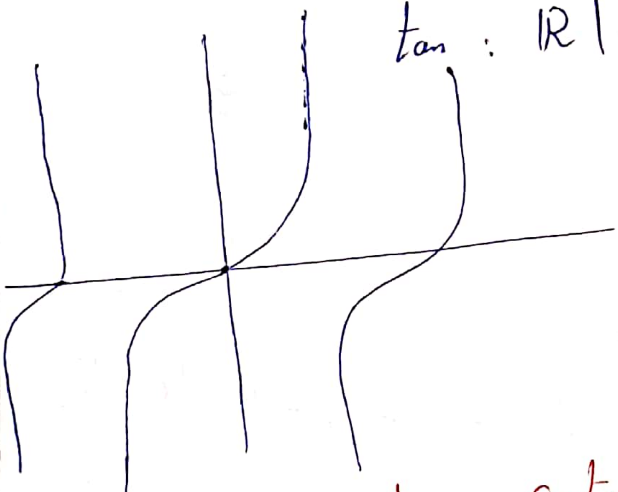
$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \cos(x).$$



5.4.3/ Fonction tangente:

La fonction tangente est définie de la façon suivante:

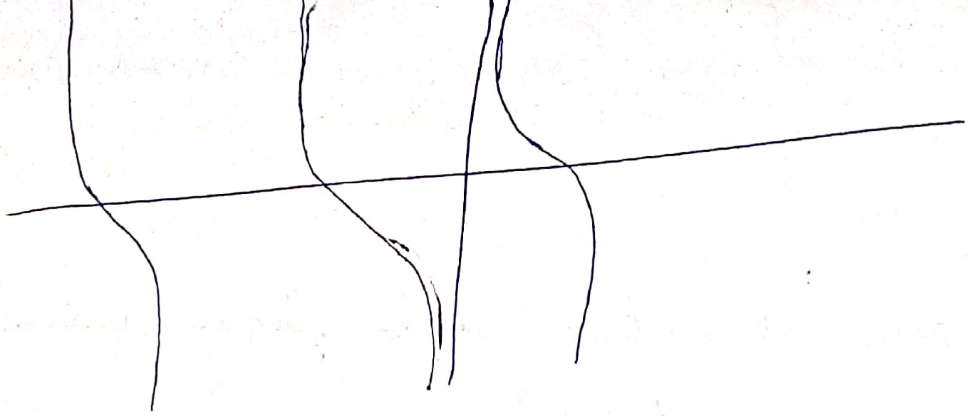
$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



5.4.4/ Fonction Cotangente,

La fonction cotangente est définie comme suit:

$$\cotan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

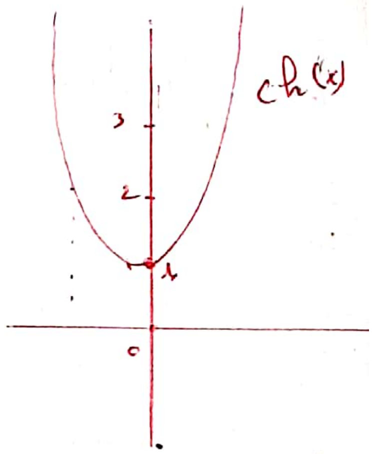


5.5/ Fonctions hyperboliques :

Elles sont très utilisées dans les applications pratiques. ce sont des combinaisons de fonctions exponentielles qui ont des propriétés assez similaires aux fonctions trigonométriques.

5.5.1/ Fonction cosinus hyperbolique :

La fonction cosinus hyperbolique notée ch est définie de la façon suivante :

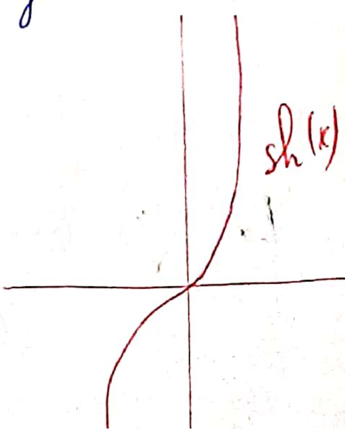


$$ch : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

La fonction ch est une fonction paire.

5.5.2 / Fonction sinus hyperbolique :

La fonction sinus hyperbolique notée sh est définie de la façon suivante :



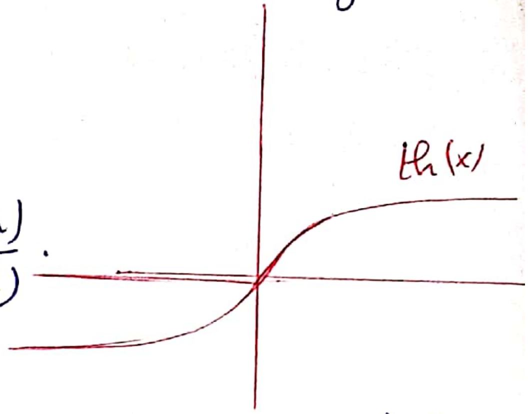
$$sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

La fonction sh est une fonction impaire.

5.3/ Fonction tangente hyperbolique :

La fonction tangent hyperbolique notée th est définie de la façon suivante :

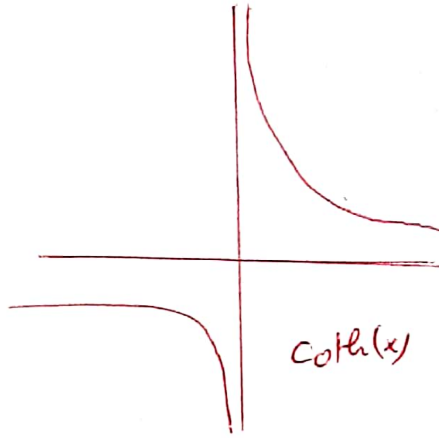
$$th : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$



5.5.4/ Fonction cotangente hyperbolique :

La fonction cotangente hyperbolique notée coth est définie de la façon suivante :

$$coth : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto coth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)}.$$



propriété : (Égalités hyperboliques) :

Soit x un nombre réel. Alors on a :

1) $ch(x) + sh(x) = e^{x}$.
2) $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$.
3) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.