Solution Série 4 :

Exo 1 :

1/ $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ , $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

$\left( \text{Car : } -x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x \text{ . et } \lim_{x \to 0} x = 0 \right)$.

Alors la fonction $f$ est dérivable en $x_0$ et :
$f'(0) = 0$.

2/ $f(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ , $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$= \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas.

donc $f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

3/ $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 - a^2}\right), & |x| < a \\ 0 \quad , & |x| \geq a \end{cases}$ , $|x_0| = a$, $a \in \mathbb{R}$

On a : $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right) & , -a<x<a \\ 0 & , x\in ]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[ . \end{cases}$

• la dérivabilité de $f$ en $x_0 = a$ :

$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{0-0}{x-a} = 0 . = f'_d(a)$.

$\lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{\exp\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)-0}{x-a} = 0 = f'_g(a)$.

On a : $f'_d(a) = f'_g(a)$. Alors $f$ est dérivable en $x_0 = a$

et $f'(a) = 0$.

• la dérivabilité de $f$ en $x_0 = -a$ :

$\lim_{x \overset{<}{\to} -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = \lim_{x \overset{<}{\to} -a} \frac{0-0}{x+a} = 0 = f'_d(-a)$

$\lim_{x \overset{>}{\to} -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = \lim_{x \overset{>}{\to} -a} \frac{\exp\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)-a}{x+a} = 0 = f'_g(+a)$

On a : $f'_d(-a) = f'_g(-a)$. donc $f$ est dérivable en

$x_0 = -a$ et $f'(-a) = 0$.

Exo 2 :

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x \le 1, \\ ax^2+bx+1 & x>1, \end{cases}$

Détermine $a, b$ pour que $f$ dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

On a : $\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,1[$ et $ax^2+bx+1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$. Alors $f$ est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

* la dérivabilité de $f$ en $x_0 = 1$ : $(f(1)=1)$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} ax^2+bx+1 = a+b+1.$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \sqrt{x} = 1 = f(1).$$

$\left\{ f \text{ est continue en } x_0=1 \iff \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = f(1) \right\}$

$$\Rightarrow a+b+1 = 1 \Rightarrow a=-b.$$

Donc $f$ est continue pour $a=-b$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{ax^2+bx+1-1}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{ax^2-ax}{x-1}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{ax\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = a = f'_d(1).$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} = f'_g(1).$$

$f$ est dérivable en $x_0=1 \iff f'_d(1) = f'_g(1)$.

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -a = \frac{-1}{2}.$$

Donc $f$ est dérivable en $x_0=1$ pour $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{-1}{2}$.

* calculer $f'(x)$ :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x - \dfrac{1}{2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exo 3 :

1/ Calculer les dérivées :

$$y_1(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$$

$$\Rightarrow y_1'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{1}{2(x + \sqrt{x})}.$$

$$y_2(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 - e^x}.$$

$$\Rightarrow y_2'(x) = \frac{-\sin x + \sin x\, e^{-x} - \sqrt{\cos x}\, e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

$$y_3(x) = e^{\cos\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y_3'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})\, e^{\cos\sqrt{x}}.$$

2/ Les dérivées n-ieme :

1/ $y_1(x) = \ln(1+x)$

$$y_1'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad y_1''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad y_1^{(3)}(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y_1^{(4)}(x) = -2\times 3 \ \frac{(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{2\times 3}{(1+x)^4}.$$

$$y_1^{(5)}(x) = \frac{2\times 3\times 4 \ (1+x)^3}{(1+x)^8} = \frac{2\times 3\times 4}{(1+x)^5}$$

$\vdots$

$$y_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

2/ $y_2(x) = \frac{1+x}{1-x}.$

$$y_2'(x) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$y_2''(x) = \frac{2\times 2\,\cancel{(1-x)}}{(1-x)^4} = \frac{2\times 2}{(1-x)^3}.$$

$$y_2^{(3)}(x) = \frac{2\times 2\times 3 \ (1-x)^{\cancel{2}}}{(1-x)^{\cancel{6}}} = \frac{2\times 2\times 3}{(1-x)^4}.$$

$$y_2^{(4)}(x) = \frac{2\times 2\times 3\times 4}{(1-x)^5}$$

$\vdots$

$$y_2^{(n)}(x) = \frac{2\,n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

3/ $y_3(x) = (x+1)^3 e^{-x}.$

Posons : $g(x) = (x+1)^3$

$g'(x) = 3(x+1)^2$, $g''(x) = 6(x+1)$, $g^{(3)}(x) = 6$, $g^{(n)}(x) = 0 \ \forall n \geq 4$

et $f(x) = e^{-x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, $\forall n \in \mathbb{N}.$

donc:

$$(y_3(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{3} C_n^k \left(e^{-x}\right)^{(n-k)} \left((1+x)^3\right)^{(k)}$$

$$= C_n^0 \left(e^{-x}\right)^{(n)} (1+x)^3 + C_n^1 \left(e^{-x}\right)^{(n-1)} \left((1+x)^3\right)' + C_n^2 \left(e^{-x}\right)^{(n-2)} \left((1+x)^3\right)''$$

$$+ C_n^3 \left(e^{-x}\right)^{(n-3)} \left((1+x)^3\right)^{(3)}$$

$$= \sum_{k=0}^{3} C_n^k (-1)^{n-k} e^{-x} \cdot \frac{3!}{(3-k)!} (x+1)^{(3-k)}$$

4/ $y_4(x) = x^2 \sin 3x$.

d'après Leibniz:

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin 3x)^{(n-k)} (x^2)^{(k)}$$

$$= 3^n x^2 \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2n\, 3^{n-1} \sin\left(3x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$+ \cancel{x}\, n(n-1)\, 3^{n-2} \sin\left(3x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$

## Exo 4:

Déterminer les extremums:

$x_0$ est extremum $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$.

1) $f(x) = \sin x^2$ , $x \in [0, \pi]$.

$f'(x) = 2x \cos x^2$.

Les point critiques sont:

$f'(x) = 0 \iff 2x \cos x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ \cos x^2 = 0 \end{cases}$

donc: $\begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \end{cases}$.

$f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$. Alors:

Pour $x = 0$:

$f''(0) = 2\cos 0^2 - 4\,0^2 \sin 0^2 = 2\cos 0 = 2 > 0$. donc 0 est extremum (minimum).

pour $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$:

$f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - 4\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

$= -4\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \neq 0$

- si $k$ pair: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 1$ donc:

  $f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) = -4\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) < 0$ donc $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ est un extremum (maximal).

- si $k$ impaire: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -1$ donc: $f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) = 4\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) > 0$

  donc $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ est un extremum (minimal).

Alors, les extremum de $f$ sont $\left\{0, \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right\}$.

$g(x) = x^4 - x^3 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = 4x^3 - 3x^2$.

Les points critiques:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(4x-3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

$g''(x) = 12x^2 - 6x$

- pour $x = \frac{3}{4}$: $g''\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} > 0$, donc $\frac{3}{4}$ est un extremum (minimal).

- pour $x = 0$: $g''(0) = 0 \Rightarrow f^{(3)}(x) = 24x - 6 \Rightarrow$
$f^{(3)}(0) = -6 \neq 0$

Alors: 0 n'est pas extremum.

EXOS:

- $f(x) = \sin 2x$ sur $[0, \pi]$.

Rolle sur $[a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b]. \\ f \text{ dérivable sur } ]a,b[ \\ f(a) = f(b). \end{cases}$

On a: $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $[0, \pi]$. et dérivable sur $]0, \pi[$.

$f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0 \Rightarrow f(0) = f(\pi)$.

Alors on peut applique le théorème de Rolle sur $f$.

2/ de même pour $g(x)$.

3/ Montrer que $x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

$0 < x < y$..

applique le théorème des accroissement finis sur la fonction $f(t) = \ln t$ dans $[x, y]$ tel que,

$0 < x < y$.

$f(t) = \ln t$. est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Alors d'après théorème des accroissement finis : $\exists x \in ]x, y[$ : $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$,

alors : $\frac{1}{c} = \frac{\ln y - \ln x}{y - x} \Rightarrow c = \frac{y-x}{\ln y - \ln x}$.

et once : $c \in ]x, y[ \Rightarrow x < c < y$.

$$\Rightarrow x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$

## Exo 6 :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \frac{0}{0}$.

Appliquons la régle de l'Hopital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x} = 0$$

2) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin \pi}{x^2 - \pi^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pi} \frac{(\sin \pi)'}{(x^2 - \pi^2)'} = \lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos \pi}{2x} = \frac{-1}{2\pi}$.