

Exercice 1:

1. Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 dans les cas suivants:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0 ; f(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0 ;$$

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 - a^2}\right) & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases}, |x_0| = a \text{ où } a \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 2:

1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ par:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Calculer $f'(x)$.

2. Soit g une fonction définie sur \mathbb{R} par:

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < e \\ a \ln x + b & \text{si } x \geq e \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a et b pour que g soit dérivable sur \mathbb{R} . Calculer $g'(x)$.

Exercice 3:

Soit la fonction f , définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier suivant les valeurs de n

- la continuité de f .
- la dérivabilité de f .
- la continuité de la fonction dérivée.

Exercice 4:

Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions suivantes:

$$f(x) = \sin^2 x \quad ; \quad g(x) = \ln(1+x) \quad ; \quad k(x) = e^x \sin x \quad ; \quad h(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

Exercice 5:

1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = (1-k)^2 x^2 + (1+k)x^3$, $k \in \mathbb{R}$.

-Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine ($x = 0$) est un extremum local de f .

2. Déterminer les extremums de $f(x) = \sin x^2$ dans l'intervalle $[0, \pi]$.

3. Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ dans \mathbb{R} .

Exercice 6:

1. Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes:

a) $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0, \pi]$.

b) $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 7: (En appliquant le théorème des Accroissements finis)

Montrer les inégalités suivantes :

1) $x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$; $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$; $0 < x < y$.

2) $a \leq \sqrt{a^2 + x^2} \leq a + \frac{x^2}{a}$; $\forall a > 0$.

Exercice 8:

Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n; n+1]$, montre que

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 9:

En utilisant le théorème de l'Hopital, calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x+1)}{x^2}.$$