مقاييس التمركز

تمهيد:

تركز مقاييس التمركز على إبراز الفرق بين التوزيع الفعلي للبيانات والتوزيع العادل (يبقى التوزيع العادل نظري بحث).

تستخدم عادة مقاييس التمركز في دراسة مدى عدالة توزيع الدخول في مناطق أو دول أو مؤسسات مختلفة.

في هذه المحاضرة سوف يتم التركيز على:

- منحنى لورنز **Lorenz Curve**؛
- مؤشر جيني **Gini Index**.

❖ **منحنى لورنز:** يمثل منحنى لورنز رسما بيانيا لتوزيع الدخل أو الثروة، طوره(Max Otto LORENZ) في عام 1905 لتمثيل عدم المساواة في توزيع الثروة.

1.تعاريف: منحنى لورنز هو أحد الأساليب الكمية الكارتو كرافية لقياس تركز ولبيان شكل ومدى العدالة في توزيع الظاهرة.

مثل:

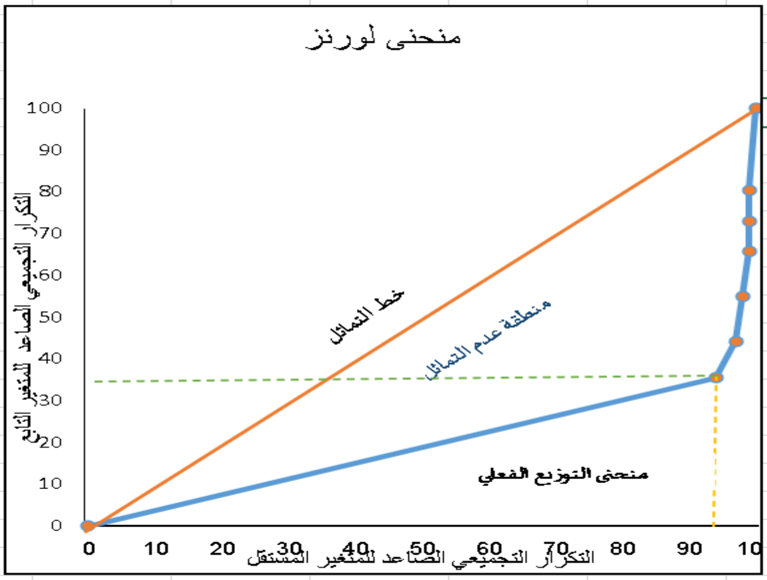
- ✓ توزيع الدخل على السكان؛
- ✓ توزيع الأراضي الزراعية بين المزارعين؛
- ✓ توزيع السكان على المساحة المأهولة.

إذن منحنى لورنز هو تمثيل بياني لظاهرة تحتوي على متغيرين، الأول متغير مستقل يمثل على محور الفواصل، والثاني متغير تابع يمثل على محور التراتيب.

2. الرسم:

فكرة منحنى لورنز قائمة على توضيح عدالة أو سوء توزيع المتغير المستقل مثل عدد الملاك، عدد السكان و........، والمتغير التابع مثل المساحة، الدخل، الأرض و.......

يكون على الشكل التالي:



❖ محور الفواصل: يمثل التوزيع التكراري النسبي المئوي الصاعد للمتغير المستقل $(F_1\%\nearrow)$

❖ محور التراتيب: يمثل التوزيع التكراري النسبي المئوي الصاعد للمتغير التابع $(F_2\%\nearrow)$

❖ خط التماثل أو خط التوزيع المثالي؛ مثلا نختار نقطة من هذا الخط ولتكن 40 % مثلا من السكان (متغير مستقل) لهم 40% من الدخل الإجمالي. أي توزيع عادل.

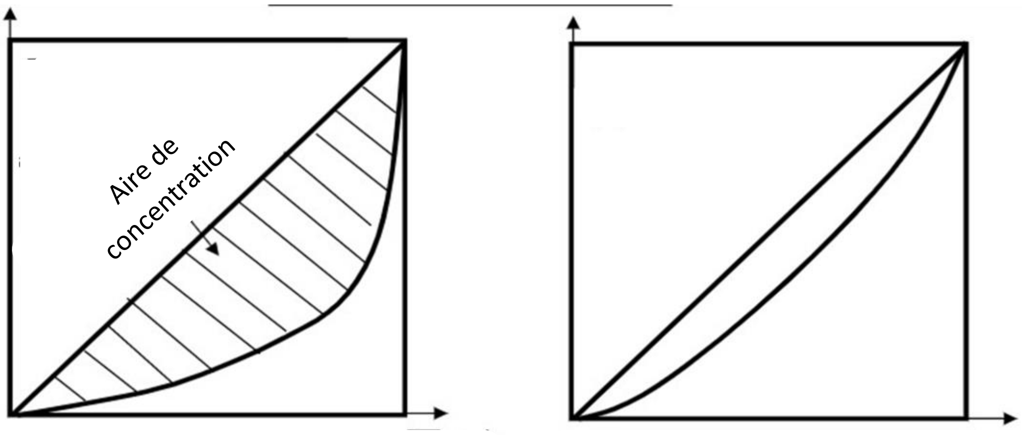
❖ منحنى التوزيع الفعلي للبيانات: يمثل لنا توزيع الظاهرة في الحقيقة؛ فمثلا لو نأخذ النقطة الأولى في المنحنى سنجد أن حوالي 94% من السكان لا يتحصلون إلا على 34% من إجمالي الدخل.

❖ منطقة عدم التماثل: كلما اقتربت هذه المنطقة من خط التماثل كلما دل ذلك على عدالة التوزيع والعكس صحيح.

إذن منحنى لورنز هو تمثيل بياني لعدم المساواة في توزيع الدخل الموجود في منطقة معينة (عادة بلد أو مؤسسة). حيث يتم وضع السكان المتراكم $(F_1\%\nearrow)$ المعبر عنه كنسبة مئوية على محور الفواصل كمتغير مستقل والدخل المتراكم $(F_2\%\nearrow)$ المعبر عنه كنسبة مئوية على محور التراتيب كمتغير تابع. لذلك ، عند النقطة (0،0) نجد دائمًا أن 0٪ من السكان لديهم 0٪ من الدخل وعند النقطة (1،1) أن 100٪ من السكان لديهم 100٪ من الدخل.

بمجرد فهم ذلك، يمكننا أن نفهم أنه كلما اقترب المنحنى من الخط المستقيم الذي يربط (0،0) مع (1،1)، (خط التماثل)، سيتم توزيع الدخل الأفضل، والخط المستقيم المذكور أعلاه هو التوزيع الأكثر مساواة ممكن، حيث يحصل جميع المواطنين من السكان على نفس الدخل بالضبط.

وبنفس الطريقة، كلما زادت المساحة المتبقية بين الخط المستقيم المذكور أعلاه والمنحنى الفعلي للبيانات، كلما زاد التفاوت الموجود.



تركز كبير

Forte concentration

تركز ضعيف

Faible concentration

3. مثال: الجدول التالي يوضح لنا توزيع مساحة الأراضي الزراعية على الملاك في منطقة معينة.

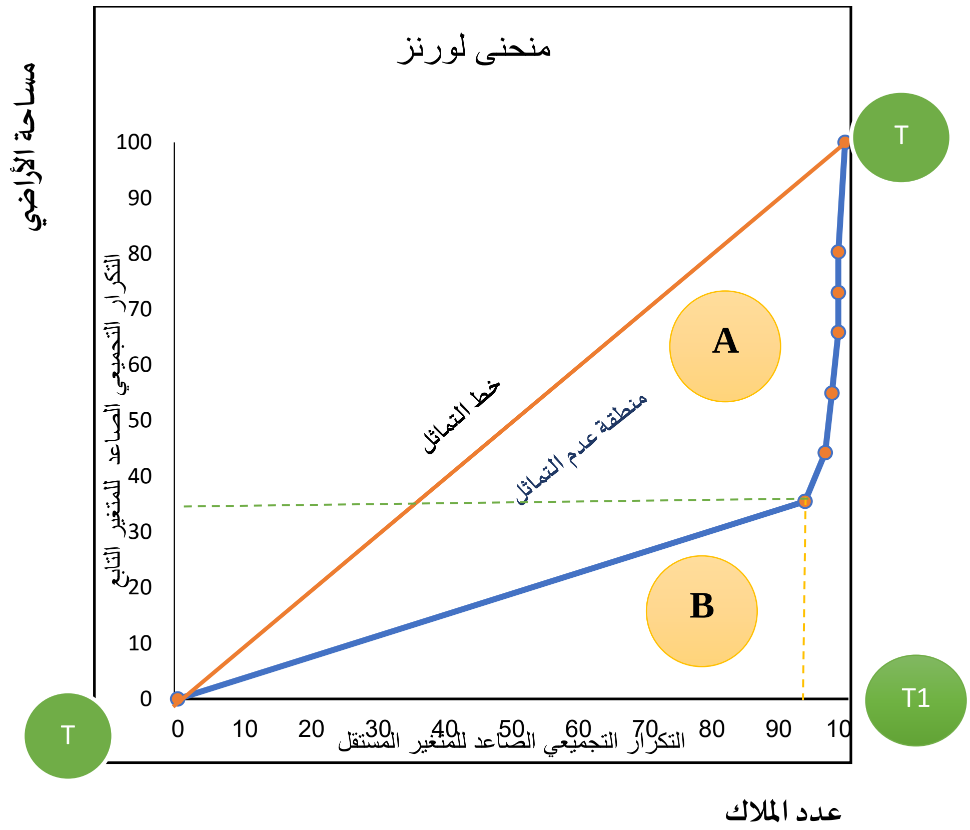
عدد الملاك	2642	79	47	22	6	3	2
المساحة (هكتار)	2122	526	638	654	430	437	1177

المطلوب: أرسم منحنى لورنز

الجدول التالي يوضح مساحات الأراضي وعدد الملاك:

التكرار النسبي المئوي الصاعد		التكرار النسبي المئوي		المساحة	عدد الملاك
$F_{i2}\%\nearrow$	$F_{i1}\%\nearrow$	$f_{i2}\%$	$f_{i1}\%$		
35.46	94.32	35.46	94.32	2122	2642
44.25	97.14	8.79	2.82	526	79
54.91	98.82	10.66	1.68	638	47
65.84	99.61	10.93	0.79	654	22
73.03	99.82	7.19	0.21	430	6
80.33	99.93	7.30	0.11	437	3
100.00	100.00	19.67	0.07	1177	2
				5984	2801

المتغير المستقل	عدد ملاك الأراضي (محور الفواصل)
المتغير التابع	مساحة الأراضي(محور التراتيب)



❖ **مؤشر جيني:** من المقاييس الهامة والأكثر شيوعا في قياس عدالة توزيع الدخل القومي، تعتمد فكرته على **منحنى لورنز**، يمتاز مؤشر جيني بأنه يعطي **قياسا رقميا** لعدالة التوزيع، وتتلخص فكرته بحساب المساحة المحصورة بين منحنى لورنز وبين خط المساواة أو العدالة وضرب هذه المساحة بـ 2.

إذن حسابيا يعرف مؤشر جيني على أنه المساحة المحصورة بين منحنى لورنز وخط العدالة مضاعفة.

أي:

$$\text{GINI index} = \frac{\mathit{Aire\ de\ concentration}}{1/2} = 2\ \text{Aire de concentration}$$

1.طريقة حساب مؤشر جيني: هناك عدة طرق لحساب المؤشر؛ منها الهندسية والحسابية.

❖ الهندسية وفيها يتم حساب المساحة المحصورة بين منحنى لورنز وخط العدالة.

من الشكل أعلاه نلاحظ أن هناك:

✓ منطقة عدم التماثل (**A**)؛

✓ المنطقة (B)؛

✓ نلاحظ أن المنطقة (A+B) تمثل مساحة المثلث TT_1T_2

إذن مؤشر جيني:

$$G_{index} = \frac{A}{A+B}$$

✓ المساحة A+B تمثل مساحة المثلث والتي تساوي القاعدة ضرب الارتفاع تقسيم 2؛

✓ إذن للحصول على مؤشر جيني لابد من حساب المساحة B.

❖ حسابيا: هناك كذلك عدة طرق منها:

- **الطريقة الأولى: يحسب بالعلاقة التالية**

نقوم بالحسابات التالية :

$Q_{i-1} = \frac{n_{i-1}x_{i-1}}{\sum n_{i-1}x_{i-1}} \nearrow$	$Q_i = \frac{nixi}{\sum nixi} \nearrow$

إذن طريقة حساب المعدل:

$$G_{index} = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i \left(\frac{nixi}{\sum nixi} \nearrow + \frac{n_{i-1}x_{i-1}}{\sum n_{i-1}x_{i-1}} \nearrow \right)$$

$$G_{index} = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i (Q_i \nearrow + Q_{i-1} \nearrow)$$

مثال: ليكن لديك التوزيع التكراري التالي:

الفئات	0.5 — 1	1 — 2	2 — 3	3 — 4	4 — 5
التكرار	1	2	6	4	2

المطلوب:

✓ أرسم منحنى لورنز

✓ أحسب مؤشر جيني

الحل:

- **منحنى لورنز**: نلاحظ عدم وجود متغير تابع ومتغير مستقل.

في هذه الحالة عملية رسم المنحنى تكون بإتباع الطريقة التالية:

- ✓ حساب التكرار النسبي (أو المئوي) f_i .
- ✓ حساب التكرار التجميعي الصاعد (أو المئوي) $F_i\nearrow$ يمثل محور الفواصل.
- ✓ حساب nixi (مركز الفئة في تكرارها).
- ✓ حساب nixi النسبي (أو المئوي) $N = \frac{nixi}{\sum nixi}$
- ✓ حساب التكرار التجميعي الصاعد $\nearrow N\nearrow = \frac{nixi}{\sum nixi}$ ؛ ويمثل محور التراتيب.

		محور الفواصل		محور التراتيب			
ci	ni	fi	$F_i\nearrow$	xi	nixi	$N = \frac{nixi}{\sum nixi}$	$N_i\nearrow = \frac{nixi}{\sum nixi}\nearrow$
0.5 1	1	0.066667	0.066667	0.75	0.75	0.017964	0.017964
1 2	2	0.133333	0.2	1.5	3	0.071856	0.08982
2 3	6	0.4	0.6	2.5	15	0.359281	0.449102
3 4	4	0.266667	0.866667	3.5	14	0.335329	0.784431
4 5	2	0.133333	1	4.5	9	0.215569	1
	15	1			41.75	1	

إذن نرسم منحنى لورنز من خلال الجدول التالي:

$F_i\nearrow$	$N_i\nearrow$
0.066667	0.017964
0.2	0.08982
0.6	0.449102
0.866667	0.784431
1	1

⟶

$F_i\nearrow$	$N_i\nearrow$
0.07	0.02
0.20	0.09
0.60	0.45
0.87	0.78
1	1

- **مؤشر جيني:**

	ni	fi	Qi	Qi-1	Qi-Qi-1	fi(Qi-Qi-1)
0.5 1	1	0.066667	0.017964	0	0.017964	0.001198
1 2	2	0.133333	0.08982	0.017964	0.107784	0.014371

2	3	6	0.4	0.449102	0.08982	0.538922	0.215569
3	4	4	0.266667	0.784431	0.449102	1.233533	0.328942
4	5	2	0.133333	1	0.784431	1.784431	0.237924
		15	1		1		**0.798004**

$$G_{index} = 1 - \sum_{i=1}^{5} f_i (Q_i \nearrow + Q_{i-1} \nearrow)$$

$$G_{index} = 1 - 0.798 = 0.201$$

- **الطريقة الثانية: يحسب بالعلاقة التالية**

$$G_{index} = \frac{\sum_i \sum_j |x_i - x_j| n_i n_j}{2n(n-1)\bar{X}}$$

أولا نقوم بحساب: $\sum_i \sum_j |x_i - x_j| n_i n_j$

حتى نقوم بحساب هذه العلاقة نقوم بعرض الجدول التكراري بالشكل الموالي:

	X_j	0.75	1.5	2.5	3.5	4.5	$\sum$
X_i	$n_{i,j}$	1	2	6	4	2	15
0.75	1	**0**	**1.5**	**10.5**	**11**	**7.5**	**30.5**
1.5	2	**1.5**	**0**	**12**	**16**	**12**	**41.5**
2.5	6	**10.5**	**12**	**0**	**24**	**24**	**70.5**
3.5	4	**11**	**16**	**24**	**0**	**8**	**59**
4.5	2	**7.5**	**12**	**24**	**8**	**0**	**51.5**
$\sum$	15	**30.5**	**41.5**	**70.5**	**59**	**51.5**	**253**

$$\sum_i \sum_j |x_i - x_j| n_i n_j = 253$$

ثانيا نقوم بحساب: $2n(n-1)\bar{X}$

xi	ni	nixi
0.75	1	0.75
1.5	2	3
2.5	6	15
3.5	4	14
4.5	2	9
	15	41.75

$$\bar{X} = \frac{41.75}{15} = 2.783$$

$$2n(n-1)\bar{X} = 2\times 15(15-1)\times 2,783 = 1169$$

$$G_{index} = \frac{\sum_i \sum_j |x_i - x_j| n_i n_j}{2n(n-1)\bar{X}} = \frac{253}{1169} = 0.216$$

خصائص مؤشر جيني:

- مؤشر جيني محصور ما بين الصفر والواحد؛ أي $0 \leq I_{GINI} \leq 1$.
- إذا كان المؤشر $I_{GINI} = 0$ فإن منحنى لورنز ينطبق على خط العدالة؛ أي هناك مساواة مطلقة.
- إذا كان المؤشر $I_{GINI} = 1$ فإن منحنى لورنز ينطبق على المثلث ABC؛ أي هناك عدم مساواة مطلقة.
- إذا كان المؤشر $I_{GINI} \prec 0.2$ فإن منحنى لورنز يقترب من خط العدالة؛ أي التوزيع أكثر عدالة.
- إذا كان المؤشر $I_{GINI} \geq 0.2$ فإن منحنى لورنز يبتعد عن خط العدالة؛ أي التوزيع أقل عدالة.