CHAPITRE 2

ANALYSE MATRICIELLE

Qu'est ce qu'une matrice

- Intersection de lignes et colonnes
- Structure de données
- Algèbre

$$A: \{1, .., \mathrm{n}\} \times \{1, .., \mathrm{m}\} \to \mathrm{K}$$

$$(i, j) \quad \to \quad a_{ij}$$

$$1 \leq i \leq n$$

$$1 \leq j \leq m$$

$a_{ij} \in \mathrm{K}$ coefficients réels ou complexes

<u>Exemple</u>

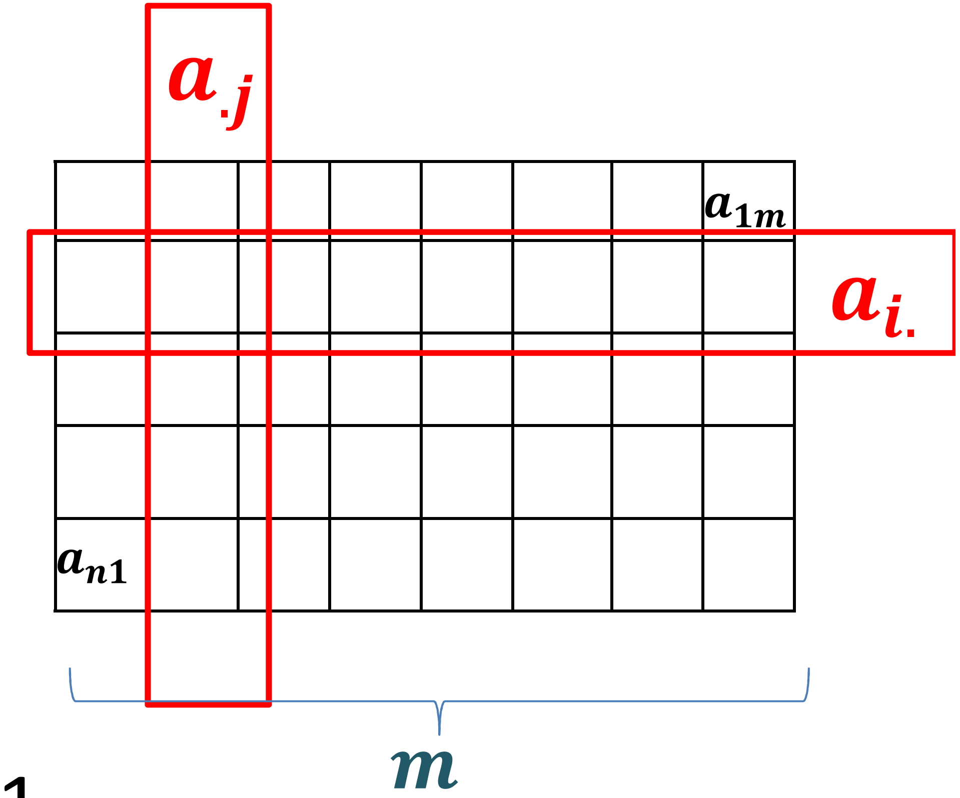
$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$ application : $\begin{matrix} (1,1) \to 1 & (2,1) \to 3 \\ (1,2) \to 0 & (2,2) \to 2 \\ (1,3) \to 5 & (2,3) \to 1 \end{matrix}$

Notations

- $M_n(K)$ $\quad M_{n,m}(K)$

  $1 \leq i \leq n$ $\quad 1 \leq i \leq n$

  $1 \leq j \leq n$ $\quad 1 \leq j \leq m$

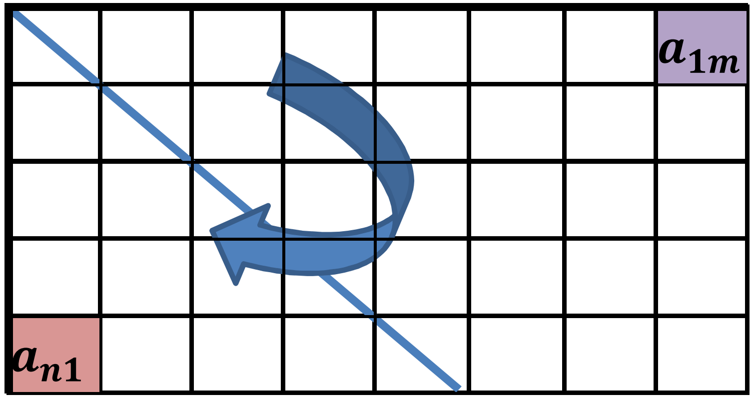


- $\boldsymbol{a_{i.}}$: vecteur 1xm
- $\boldsymbol{a_{.j}}$: vecteur nx1
- $\boldsymbol{a_{ii}}$: vecteur min(n,m)x1

Notations

- $(A^t)_{ji}$ matrice **transposée** de $(A)_{ij}$

  $$(A^t)^t = A$$

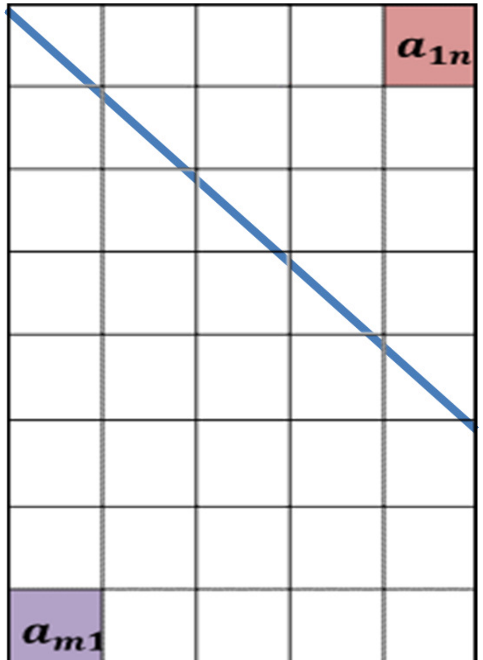


- $(A^*)_{ji}$ matrice **adjointe** de $(A)_{ij}$

  $$(A^*)_{ji} = (\overline{A^t})_{ji}$$

  $$(A^*)^* = A$$

- $M_{1,m}(K)$
- $M_{n,1}(K)$
-



Opérations sur les matrices

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in M_{n,m}(K)$,

$$\forall (i,j) \in \{1, .., \mathrm{n}\} \times \{1, .., \mathrm{m}\}$$

- Egalité $a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow A = B$
- Addition $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  - $0_{n,m}$
  - $A + B = B + A$
  - $(A+B)^t = (A)^t + (B)^t$
  - $(A+B)^* = (A)^* + (B)^*$

Opérations sur les matrices

- Multiplication par un scalaire

$$C = \lambda A \iff c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

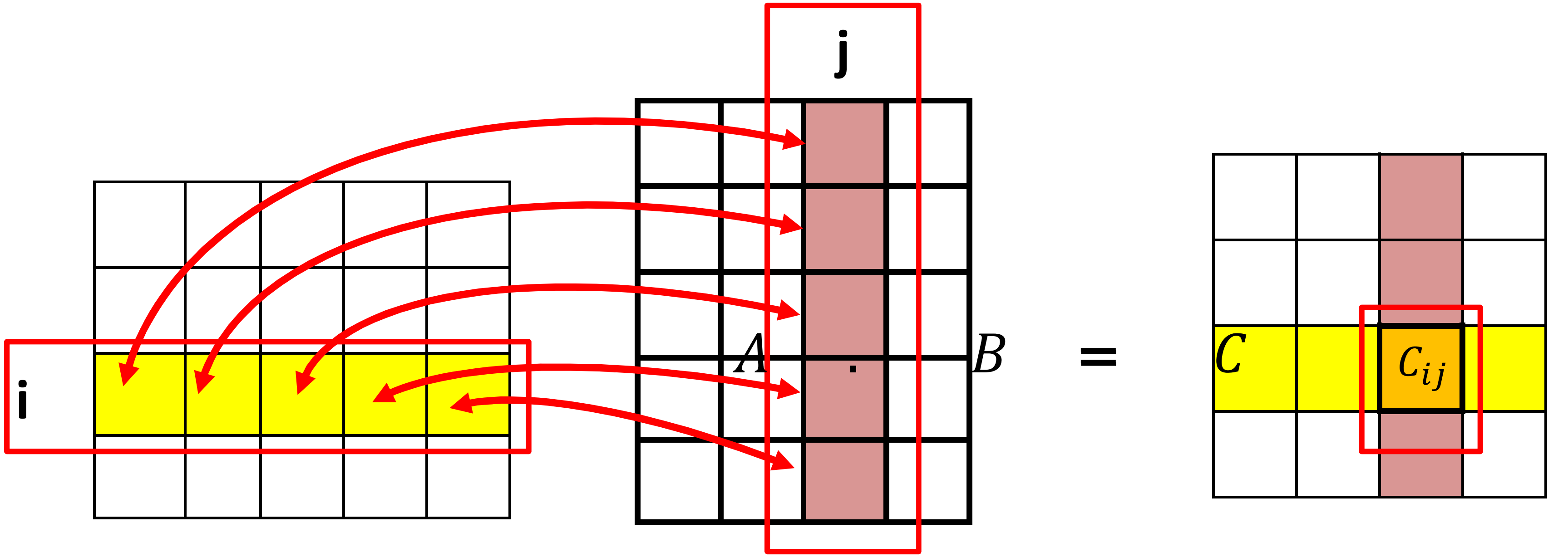
$$(\lambda A)^t = \lambda A^t,$$

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

Produit de matrices



$A \in M_{n,p}(K)$ $B \in M_{p,m}(K)$ $C \in M_{n,m}(K)$

- $C = A\,B \iff C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Matrice identité

- $I_n = \delta_{ij} = \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}$

- $A \in M_{n,\boldsymbol{p}}(K),\ I_p$ $\qquad A\,.\,I = A$

Propriétés

- $A + B = B + A\,,$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A\,.\,B \quad \neq \quad B\,.\,A$

$$(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$$

$$(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$$

- $A\,.\,(B\,.\,C) = (A\,.\,B)\,.\,C$

❑A.(B+C)=A.B+A.C

Propriétés

- $A = 0 \quad$ ou/et $\quad B = 0 \qquad \Rightarrow A\,.\,B = 0$
- $A\,.\,B = 0 \;\not\Rightarrow A = 0 \; ou \; B = 0$

- $A^p = A \cdot A \cdot \;\ldots\; \cdot A \quad p$ fois
- Exemple

$$\mathrm{A} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad\qquad A^p = \begin{matrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2p \end{matrix} .$$

- $A^0 = I$

Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$,

- Existence

  $\exists ?\ A^{-1}$ tq $\quad A \cdot A^{-1} = I_n$

- L'inverse de A est noté A^{-1}
- Si $\exists\ A^{-1}$ alors A est dite non singulière ou inversible

- Propriétés

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad\qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} \qquad\qquad (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

Trace d'une matrice

$$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum \boldsymbol{a_{ii}}$$

- $tr(\alpha A + B) = \alpha \cdot tr(A) + tr(B)$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors
$$tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$$

Déterminant d'une matrice

$$\det : \begin{cases} M_n(K) & \rightarrow & K \\ (A_{\boldsymbol{i,j}}) & \rightarrow & y \end{cases}$$

<u>Exemple :</u>

soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

Calcul du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = ??$$

Méthode de SARRUS

$$= \boldsymbol{aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd}$$

Calcul du déterminant

Développement de LAPLACE

$$A_{ij} = \begin{array}{cccc} a & d & \cdots & x \\ b & e & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & f & \cdots & z \\ & \uparrow & & \\ & j & & \end{array}$$

$A \in M_n(K)$

$(A_{ij}) =$ Mineur de A d'ordre n-1 $= \det A_{ij}$

$Cof_{ij} =$ Cofacteur de (A_{ij}) $= (-1)^{i+j}(A_{ij})$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, . \, Cof_{ij}$$

Calcul du déterminant

Méthode de LAPLACE

Développement sur une ligne

$$A_{ij} = \begin{array}{cccc|l} a & d & \dots & x & \\ \cancel{b} & \cancel{e} & \cancel{\dots} & \cancel{y} & \leftarrow \boldsymbol{i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c & f & \dots & z & \end{array}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, Cof_{ij}$$

Propriétés du déterminant

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$$

$$\det\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\det\ A^{t} = \det A$$

$$det\ A^{*} = \overline{\det A}$$

$$\det I_n = 1$$

Propriétés du déterminant

En posons : $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C_1 & \cdots & C_k & \cdots & C_l & \cdots & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{21} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$

<u>$\boldsymbol{det\, A = 0}$ **pour 3 cas**</u>

1. $A = 0_n$

2. Si $\exists\ 1 \leq k \leq l \leq n$ tel que $C_k = C_l$

3. Si $\exists\ k$ tel que $C_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\mathrm{n}} \lambda_i C_i$

Calcul de l'inverse de A

Soient : $A \in M_n(K)$

$C = Com(A) = \left(Cof_{ij}\right)$ tel que

$cof_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t}$$

Matrices particulières

Matrice diagonale

$\forall (i, j)$, tel que $i \neq j, a_{ij} = 0$

?	**0**	**0**	**0**
0	**?**	**0**	**0**
0	**0**	**?**	**0**
0	**0**	**0**	**?**

- Somme est une diagonale
- Produit AxB est une diagonale
- $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
- $\forall i, a_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible

$\frac{1}{a_{11}}$	**0**	**0**	**0**
0	$\frac{1}{a_{22}}$	**0**	**0**
0	**0**	$\ddots$	**0**
0	**0**	**0**	$\frac{1}{a_{nn}}$

Matrices particulières

Matrice triangulaire

Supérieure

$\forall (i,j) |\ i > j, \qquad a_{ij} = 0$

$$\begin{matrix} ? & ? & ? \\ \mathbf{0} & ? & ? \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & ? \end{matrix}$$

Inférieure

$\forall (i,j) |\ i < j, \qquad a_{ij} = 0$

$$\begin{matrix} ? & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ ? & ? & \mathbf{0} \\ ? & ? & ? \end{matrix}$$

- $\det A = \prod_{i=1..n} a_{ii}$
- A^{-1}
- $A \cdot B$

Matrices particulières

- Matrice a diagonale dominante (≥)
- Matrice a diagonale strictement dominante (>)

<u>par ligne</u>

$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$		
	$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$	
		$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$

<u>par colonne</u>

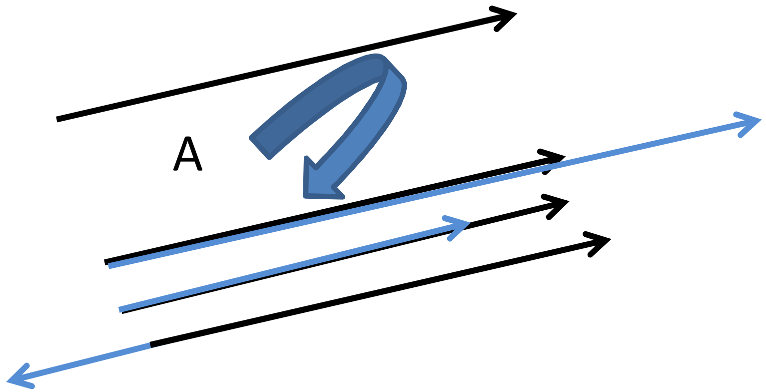
$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$		
	$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$	
		$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$

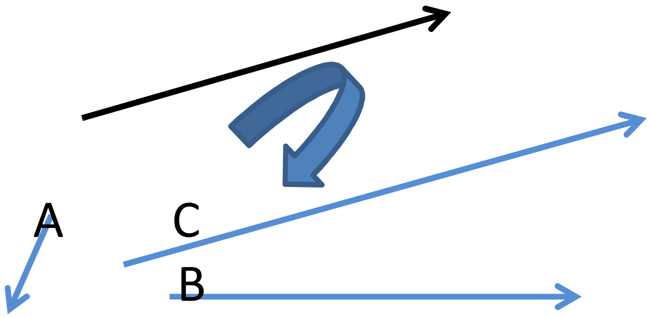
Vecteurs et valeurs propres

Vecteurs et valeurs propres

$$f \in \mathcal{L}(E,F) : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \quad AX = Y \text{ avec } A \in M_n(K)$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \quad \overset{A}{\curvearrowright} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{y_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{matrix}$$





$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vecteurs et valeurs propres

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$AX = \lambda X$$

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$: vecteur propre de A

correspondant a la valeur propre $\lambda = 3$

Vecteurs et valeurs propres

Définition

- On dit que λ est une valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur x non nul solution de

$$Ax = \lambda x$$

- Le vecteur x est alors dit vecteur propre associé à λ

Vecteurs et valeurs propres

$$\boldsymbol{\lambda} =?$$

on a $\lambda x = Ax$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda x - Ax \\ 0 &= \lambda \boldsymbol{I} x - Ax \\ 0 &= (\lambda \boldsymbol{I} - A)x \\ &\Rrightarrow Bx = 0 \end{aligned}$$

- $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$: équation caractéristique de A
- $\det(\lambda \mathrm{I} - A)$

  polynôme caractéristique de A, noté $P_A(\lambda)$

Calcul des vecteurs et valeurs propres

- Les valeurs propres d'une matrice A d'ordre n sont les racines dans K du polynôme caractéristique associé à A

  → racines de $P_A(\lambda)$ = $\det(\lambda \mathrm{I} - A)$

- À toute valeur propre λ d'une matrice A, est associé au moins un vecteur non nul v tel que $Av = \lambda v$, appelé vecteur propre de la matrice A correspondant à la valeur propre λ.

Spectre, Rayon spectral, …

- Le spectre de A, noté $\sigma_{\mathbb{K}}(A)$est l'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$.

- Si $\sigma_{\mathbb{K}}(A) \neq \Phi$, le rayon spectrale de A est le réel positif défini par $\rho(A) = \max\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(A)\}$

Quelques propriétés

- $\sigma_{\mathbb{K}}(A) = \sigma_{\mathbb{K}}(A^t)$
- Soit la matrice A d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et possédant toujours n valeurs propres λ_i, $i = 1, \dots, n$ distinctes ou confondues, on a les propriétés suivantes :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Rappel
Notions de l’algèbre

Application linéaire (rappel)

Définition 1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in E,$
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u), \forall u \in E$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}.$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$ ou $L(E,F)$
Si une application f est linéaire alors :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $f(-u) = -f(u)$

Matrice et Application linéaire

E

F

$$x = \sum_{j=1}^{m} x_j . e_j \qquad f(x) = y \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i . b_i$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y_1 = \mathrm{a}_{11}\, x_1 + \mathrm{a}_{12}\, x_2 + .. + \mathrm{a}_{1m}\, x_m \\ y_2 = \mathrm{a}_{21}\, x_1 + \mathrm{a}_{22}\, x_2 + .. + \mathrm{a}_{2m}\, x_m \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ y_n = \mathrm{a}_{n1}\, x_1 + \mathrm{a}_{n2}\, x_2 + .. + \mathrm{a}_{nm}\, x_m \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j}$$

Morphisme(représentation matricielle)

$$\boldsymbol{y_i} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a_{ij}} \cdot \boldsymbol{x_j}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \dots & \mathrm{a}_{1m} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \dots & \mathrm{a}_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \mathrm{a}_{n-11} & \mathrm{a}_{n-12} & \dots & \mathrm{a}_{n-1m} \\ \mathrm{a}_{n1} & \mathrm{a}_{n2} & \dots & \mathrm{a}_{nm} \end{matrix} \bullet \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}$$

avec $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{n,m}}(\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{m}}$

A est dite la matrice de l'application f de la base canonique $\{e_j\}$ $de\, R^m$ vers la base canonique $\{b_i\}$ de R^n

Récapitulatif

A matrice

- Structure de données
- (i,j) → a_{ij} (1,1)→ a_{11} (1,2)→ a_{12}....
- Valeur propre correspondant à un vecteur propre
- **$\boldsymbol{A}$ matrice d'une application linéaire $\boldsymbol{f}$**

→On étend aux matrices toutes les définitions relatives aux applications linéaires

Application linéaire (rappel)

Ayant E et F deux K-espaces vectoriels et $f: E \to F$ une application linéaire,

Image de *f*

$$Im(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

- $f(E)$ l'image de E par f est
- noté ***Im*** $(\boldsymbol{f})$; est un sous espace vectoriel de F

Noyau de *f*

- noté $ker(\boldsymbol{f})$;

$$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

Rang de *f*

$$\mathrm{Rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

- Pour $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq F$ un espace vectoriel de dimension finie,

La dimension de $\mathrm{Im}\, f$, noté $\mathrm{Rg}(f)$ ou rang f

Rang de matrice

Calcul

Pour une famille de n vecteurs $de\, E$, $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq E$,

1. $0 \leq \mathrm{rg}(\{u_1, \ldots, u_n\}) \leq n$: le rang est inférieur ou égal au nombre d'éléments dans la famille.
2. E est de dimension finie alors $\mathrm{rg}(\{u_1, \ldots, u_n\}) \leq \dim(E)$: le rang est inférieur ou égal à la dimension de E.
3. rg $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = 0 \Leftrightarrow u_1, u_2, \ldots u_n = 0$
4. rg $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = n \Leftrightarrow \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ famille libre
5. Théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

$$\dim(\ker(\mathrm{A})) + \mathrm{rang}(\mathrm{A}) = \mathrm{m}$$

Synthèse des concepts

Pour $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_n}(\mathbb{K})$

$\mathbf{A}$ *est inversible.* $\Leftrightarrow$

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$ $\Leftrightarrow$

$\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ $\Leftrightarrow$

La seule solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *est la solution triviale.* $\Leftrightarrow$

Les vecteurs lignes de $\mathbf{A}$ *sont linéairement indépendants.* $\Leftrightarrow$

Les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$ *sont linéairement indépendants.* $\Leftrightarrow$

$\lambda = 0$ *n'est pas une valeur propre de* $\mathbf{A}$. $\Leftrightarrow$

A matrice à diagonale dominante $\Leftrightarrow$