وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف – ميلة

الموسم الجامعي: 2023/22	السداسي الأول	المقياس: اتخاذ القرار	ماستر: إدارة الأعمال

حل السلسلة (1) النماذج الرياضية لاتخاذ القرار (التحليل الحدى)

أولا- الأمثلية غير المقيدة المتضمنة لمتغير أو أكثر

التمرين (1)

نفترض أن منشأة إسمنت في إحدى الدول تهدف إلى تعظيم ربحها وقد توفرت المعلومات التالية:

دالة الإرادات الكلية: $TR=45Q- 0.5Q^2$

دالة التكاليف الكلية: $TC=Q^3-8Q^2+57Q+2$

1- حدد دالة الهدف للمنشأة Objective Function (OF) وصغها جبريا.

2- حدد قرار المنشأة لمستوى الإنتاج الذي يعظم الربح (دالة الهدف).

3- حدد مستوى الربح الذي يعطي المنشأة الحل الأمثل.

4- ما هو مفهوم الربح الحدي Marginal profit؟

الحل:

1- تحديد دالة الهدف للمنشأة Objective Function (OF) وصغها جبريا.

من خلال معطيات التمرين نستنتج أننا في حالة التأكد، لتوفر المعلومات المتمثلة في معرفة دالة الإيراد الكلي TR ودالة التكلفة الكلية TC. كما أن حالة التأكد هذه تمثل قرارا فرديا في سوق المنافسة التامة أو الاحتكار التام وطالما تسعى المنشأة لتعظيم ربحها (π) فإن صياغة دالة الهدف (OF) تكون على النحو التالي:

$$\text{Max}(\pi) = TR - TC$$

وباستخدام المعلومات المتوفرة في نص التمرين نحصل على الآتي:

$$\pi = 45Q - 0.5Q^2 - (\text{Q3} - 8\text{Q2} + 57\text{Q} + 2) = -Q^3 + 7.5Q^2 - 12Q - 2$$

بمعنى أن: $\text{Max}(\pi) = -Q^3 + 7.5Q^2 - 12Q - 2$

2- تحديد قرار المنشأة لمستوى الإنتاج الذي يعظم الربح (دالة الهدف).

ولتعظيم هذه الدالة نتبع الخطوتين التاليتين:

أ) حساب المشتقة الأولى لدالة الربح ومساواتها بالصفر فنجد أن:

$$\pi = f(Q) = -Q^3 + 7.5Q^2 - 12Q - 2$$

بما أن الربح هو دالة للكمية فإن: $\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 15Q - 12$

ومنه: $\frac{d\pi}{dQ} = 0 \Leftrightarrow -3Q^2 + 15Q - 12 = 0$

أي أن: $(-3Q - 3)(Q - 4) = 0 \Leftrightarrow Q = 1 \ \ ou\, Q = 4$

ب) أمام المنشأة لتحقيق أقصى ربح ممكن لها قرارين، مستوى الإنتاج $Q = 1$، ومستوى الإنتاج $Q = 4$

3- تحديد مستوى الربح الذي يعطي المنشأة الحل الأمثل.

يكون اتخاذ القرار متوقف على دراسة الشرط الكافي. أي إيجاد المشتقة الثانية من أجل تحديد نوع النهاية الحدية.

ولإيجاد قيمة الربح الأمثل (أعظم ربح) نلجأ إلى دراسة إشارة المشتقة الثانية عند مستويي الإنتاج حتى نستطيع تحديد أي قرار تتخذه المنشأة.

حيث: $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 15$ ، وبالتالي: $\frac{d^2\pi(1)}{dQ^2} = 9 > 0$ و $\frac{d^2\pi(4)}{dQ^2} = -9 < 0$

ومن النتيجتين أعلاه يتبين أن القيمة العظمى للربح تتحقق عندما يكون المشتق الثاني سالبا

بمعنى أن النتيجة التي تشير إلى تحقيق أقصى ربح ممكن هي عند مستوى الإنتاج $(Q^* = 4)$

أما أقصى ربح ممكن تحققه المنشأة عند مستوى الإنتاج $(Q^* = 4)$ فهو $(\pi(4) = 6)$

4- مفهوم الربح الحدي Marginal profit: هو الربح الذي يتحقق من بيع الوحدة الحدية الأخيرة من إنتاج المنشأة.

ويمثل الإيراد الحدي الزائد في الإيرادات الكلية الناتج عن بيع وحدة إضافية.

التمرين (2)

إذا كانت دالة الطلب لمنتجات منشأة ما تأخذ الشكل الآتي: $P = 24 - 3Q$

وكانت دالة التكاليف لها كالآتي: $TC = Q^3 - 3Q^2 - 24Q + 100$

1- حدد المفاهيم الأساسية التالية: الإيراد الكلي، دالة التكلفة الثابتة ودالة التكلفة المتغيرة، ومتوسط التكلفة الكلية.

2- حدد مستوى الإنتاج (Q^*) الذي يحقق أقصى ربح ممكن (π)

3- حدد كل من الإيراد الحدي، والتكلفة الحدية عند حجم الإنتاج (Q^*).

الحل:

1- تحديد المفاهيم الأساسية المطلوبة: الإيراد الكلي، دالة التكلفة الثابتة ودالة التكلفة المتغيرة، ومتوسط التكلفة الكلية.

المفهوم	الرمز	المقدار
الإيراد الحدي	MR	MR=$-3Q^2 + 24$
التكلفة الثابتة	FC	FC=100
التكلفة المتغيرة	VC	VC=$Q^3 - 3Q^2 - 24Q$
التكلفة الكلية المتوسطة	ATC	ATC=$Q^2 - 3Q - 24 + \frac{100}{Q}$

2- تحديد مستوى الإنتاج (Q^*) الذي يحقق أقصى ربح ممكن (π)

لتعظيم دالة الربح (π) عند مستوى معين من الإنتاج Q نتبع الخطوات التالية:

حساب الإيراد الكلي: $TR = PQ = (24 - 3Q)Q = 24Q - 3Q^2$

دالة الربح : $\pi = TR - TC = -Q^3 + 48Q - 100$

الشرط اللازم لتعظيم دالة الربح: نحسب ثم نعدم الدالة المشتقة للدالة π: $\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 48$

ومنه: $\frac{d\pi}{dQ} = 0 \Leftrightarrow -3Q^2 + 48 = 0 \Leftrightarrow Q = \mp 4$

هذا يعني وجود قيمتين لمستوى الإنتاج، قيمة سالبة $Q = -4$ وهذه تهمل لأنه لا معنى لها اقتصاديا. أما القيمة الثانية $Q = 4$ وهذا يمثل مستوى الإنتاج للمنشأة؟

الشرط الكافي: لتحديد الإشارة التي تسمح لصاحب المنشأة باتخاذ القرار، يتم ذلك بحساب المشتقة الثانية:

حيث: $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q < 0$

ثانيا- الأمثلية المقيدة المتضمنة لمتغيرين أو أكثر ومضاعف لاغرانج

التمرين (4)

بافتراض أننا نريد الحصول على النهاية الحدية (النقطة الحرجة) لدالة الهدف التالية:

$$z = -2x^2 + y^2 \dots (1)$$

تحت القيد التالي:

$$y - 2x + 1 = 0 \quad \dots (2)$$

حدد طبيعة النقطة الحرجة (النهاية الحدية) لهذا النموذج المقيد.

الحل:

تحديد طبيعة النقطة الحرجة (النهاية الحدية) لهذا النموذج المقيد.

من خلال المعادلة (2) نحصل على قيمة y بدلالة x فنجد: $y = 2x - 1$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل عبارة z بدلالة المتغير x على الشكل التالي:

$$= \ z = -2x^2 + y^2 = \ -2x^2 + (2x-1)^2 \ \Leftrightarrow z = 2x^2 - 4x + 1$$

في هذه الحالة نقوم بدراسة الشرطين اللازم ثم الكافي للدالة z كما رأينا سابقا بالنسبة لدالة ذات متغير واحد.

الشرط اللازم: نحسب المشتقة الأولى للدالة z ثم نقوم بإعدامها للحصول على النقطة الحرجة.

لدينا: $\frac{dz}{dx} = 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ وبالتعويض في المعادلة (2) نجد أن: $y = 1$

إذن النقطة الحرجة هي: $A(1,1)$

الشرط الكافي: لتحديد طبيعة النقطة الحرجة، نقوم بدراسة إشارة المشتقة الثانية للدالة z بدلالة x فيكون:

$\frac{d^2z}{dx^2} = 4 > 0$ وبالتالي فإن طبيعة النقطة الحرجة في هذه الحالة هي قيمة حدية صغرى.

التمرين (5)

ما هو الحل الأمثل لدالة كوب- دوجلاس للإنتاج التالية: $Q = K^{0.4}.L^{0.5}$

علما أن قيد الميزانية (Bugedet Constraint) هو 108 دينار، وأن سعر رأس المال $p_K = 3$ وسعر العمل $p_L = 4$

الحل:

إيجاد الحل الأمثل لدالة كوب- دوغلاس للإنتاج: $Q = K^{0.4}.L^{0.5}$

من خلال معطيات التمرين نحصل على قيد دالة الإنتاج الآتي: $3K + 4L = 108$

ونعرف دالة لاغرانج حسب المعلومات المتوفرة كالآتي: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = K^{0.4} \cdot L^{0.5} + \lambda(108 - 3K - 4L)$

الشرط اللازم: لبلوغ الحل الأمثل لدالة كوب-دوغلاس الحل الأمثل نستخرج المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج $\mathcal{L}$ بالنسبة للمتغيرات الثلاث K ،L،λ وإعدامها على النحو التالي:

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0.4K^{-0.6}L^{0.5} - 3\lambda = 0 \ \dots (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0.5K^{0.4}L^{-0.5} - 4\lambda = 0 \ \dots (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 108 - 3K - 4L = 0 \qquad \dots (3) \end{cases}$$

نقوم بحل المعادلات الثلاث للجملة (S) آنيا لإيجاد قيم K ،L،λ بالشكل التالي:

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على:
$$\begin{cases} 0.4K^{-0.6}L^{0.5} = 3\lambda \ \dots (4) \\ 0.5K^{0.4}L^{-0.5} = 4\lambda \ \dots (5) \end{cases}$$

وطالما أن إشارة المشتقة الثانية لدالة الربح سالبة، معناه أن مستوى الإنتاج والبالغ (4) وحدات هو الذي يعطي أقصى ربح ممكن والذي يقدر بـ: $\pi = -(4)^3 + 48(4) - 100 = 28$

إذن النقطة الحرجة هي قيمة حدية عظمى وهي $A(4,28)$

3- تحديد كل من الإيراد الحدي، والتكلفة الحدية عند حجم الإنتاج $(Q^* = 4)$.

أ) الإيراد الحدي: $\frac{dTR}{dQ} = 24 - 6Q$ ومنه: $\frac{dTR}{dQ}(4) = 24 - 6(4) = 0$

ب) التكلفة الحدية: $\frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 6Q - 24$ ومنه: $\frac{dTC}{dQ}(4) = 3(4)^2 - 6(4) - 24 = 0$

النتيجتان أعلاه تتطابقان مع مدلول النظرية الاقتصادية عند تحقق أقصى ربح ممكن وهي:

$$\frac{dTR}{dQ}(4) = \frac{dTC}{dQ}(4) = 0$$

<u>التمرين (3)</u>

لنفترض أن منشأة تنتج سلعتين هما التلفزيونات (x) والمراوح (y) وكان ربح المنشأة تحددها الدالة الآتية:

$$f(x,y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$$

فإذا كانت المنشأة تهدف إلى تعظيم ربحها دون قيد على كميات الإنتاج.

1- أعط صياغة لنموذج يوافق سلوك المنشأة.

2- حدد كميات الإنتاج التي تحقق تعظيم الربح.

<u>الحل:</u>

1- اعطاء صياغة لنموذج يوافق سلوك المنشأة.

إن معرفة طبيعة دالة الربح للمنشأة، وعدم توفر معلومات عن ردود فعل منافسي المنشأة حيث تعمل في محيط التأكد إما في إطار سوق منافسة تامة (توفر المعلومات السوقية)، أو في حالة احتكار تام (توفر معلومات احتكارية). وحل هذه المشكلة باستخدام التقنيات الكلاسيكية وفق التحليل الحدي، خاصة وأنه لا يوجد قيد على إنتاج المؤسسة أو على مستوى ربحيتها.

1- يمكن صياغة النموذج على النحو التالي: $Max(\pi) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$

2- تحديد كميات الإنتاج التي تحقق تعظيم الربح.

نستطيع إيجاد حجم كل من (x) و (y) اللتان تحققان أقصى ربح ممكن للمنشأة من خلال الشرطين:

أ) **الشرط اللازم:** نقوم بحساب المشتقات الجزئية الأولى لدالة الربح وإعدامها فيكون لدينا ما يلي:

$$\begin{cases} \frac{d\pi}{dx} = 80 - 4x - y = 0 \\ \frac{d\pi}{dy} = -x - 6y + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + Y = 80 \\ x + 6y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16.52 \\ y = 13.92 \end{cases}$$

ب) **الشرط الكافي:** نقوم بدراسة إشارات المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للتأكد من أن المنشأة في حالة تعظيم الربح.

لدينا: $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -4 < 0$ ، $\frac{d^2\pi}{dy^2} = -6 < 0$ وهذا ما يؤكد أن المنشأة هي فعلا في حالة تعظيم ربحها.

وللحصول على مقدار هذا الربح نعوض كلا من x و y في دالة الربح فنجد:

$$\pi = 80(16.52) - 2(16.52)^2 - (16.52)(13.92) - 3(13.92)^2 + 100(13.92)$$

أي أن أقصى ربح يمكن أن تحققه المنشأة هو: $\pi = 1356.54$ وحدة

وبقسمة المعادلة (4) على المعادلة (5) نتخلص من المجهول λ فنجد:

$$\frac{0.4K^{-0.6}L^{0.5}}{0.5K^{0.4}L^{-0.5}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{L}{K} = \frac{0.75}{0.8} \Leftrightarrow L = 0.9375K$$

وبتعويض قيمة L في المعادلة (3) نحصل على: $3K + 4(0.9375) = 108 \Leftrightarrow 6.75K = 108$

وبالتالي فإن: K = 16 وبإحلال هذه القيمة في المعادلة (3) نحصل على L=15

إذن ستبلغ دالة الإنتاج $Q = K^{0.4}.L^{0.5}$ قيمتها المثلى (قيمة حدية عظمى) عند استخدام التوليفة $= (K^*, L^*)$ (16,15) لأن المشتقات الجزئية الثانية لدالة الإنتاج بالنسبة للمتغيرين K و L سالبة (تأكد من ذلك).

التمرين (6)

منشأة تنتج سلعتين (x) و (y) علما أن دالة تكاليفها هي: $TC = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30$

ضمن القيد على المنشأة والمتمثل في العلاقة: $x + y = 34$.

ما هي الكميات المنتجة من (x) و (y) التي تجعل تكاليف المنشأة أدنى ما يمكن؟ وما قيمة هذه التكلفة؟

الحل:

1- من خلال معطيات التمرين يتضح لنا أن المنشأة تعمل في حالة تأكد نظرا للمعلومات المتوفرة عن دالة التكلفة وكذا القدرة الإنتاجية للمؤسسة، إضافة إلى عدم توفر معلومات عن ردود فعل تنافسي للمنشأة، فهي تعمل في إطار سوق منافسة تامة (توفر المعلومات السوقية)، أو في حالة احتكار تام (توفر معلومات احتكارية). ويتم حل هذه المشكلة باستخدام التقنيات الكلاسيكية وفق التحليل الحدي، خاصة وأنه يوجد قيد على إنتاج المؤسسة متمثلا في العلاقة: $x + y = 34$

2- نعرف دالة لاغرانج حسب المعلومات المتوفرة كالآتي:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30 + \lambda(34 - x - y)$$

أ) **الشرط اللازم:** لبلوغ الحد الأدنى لدالة التكاليف الكلية نستخرج المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج $\mathcal{L}$ بالنسبة للمتغيرات الثلاثة x، y، λ وإعدامها على النحو التالي:

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 12x - y - \lambda = 0 \ \dots(1) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = 20y - x - \lambda = 0 \ \dots(2) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 34 - x - y = 0 \ \dots(3) \end{cases}$$

ومن المعادلتين (1) و(2) نحصل على: $\begin{cases} 12x - y = \lambda \ \dots(4) \\ 20y - x = \lambda \ \dots(5) \end{cases}$

وبقسمة المعادلة (4) على المعادلة (5) نتخلص من المجهول λ فنجد:

$$\frac{12x - y}{20y - x} = 1 \Leftrightarrow 12x - y = 20y - x \Leftrightarrow y = \frac{13}{21}x$$

وبتعويض قيمة y في المعادلة (3) نحصل على: $x + \frac{13}{21}x = 34 \Leftrightarrow 34x = 34 \times 21$

وبالتالي فإن: x = 21 وبإحلال هذه القيمة في المعادلة (3) نحصل على y=13

ت) **الشرط الكافي:** ستبلغ دالة التكاليف الكلية $TC = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30$ قيمتها المثلى (قيمة حدية صغرى) عند استخدام التوليفة $(x^*, y^*) = (21,13)$ لأن المشتقات الجزئية الثانية لدالة التكلفة الكلية بالنسبة للمتغيرين x و y موجبة حيث:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2} = 12 > 0 \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2} = 20 > 0 \end{cases}$$

ملاحظة: يمكن للطالب اتباع الطريقة الثانية بعد التعبير عن y بدلالة x ثم التعويض في دالة التكاليف الكلية TC.

التمرين (7)

تنتج مؤسسة نوعين من أغذية الأنعام (A) و (B) وبدراسة سلوك الربح المتحقق من بيعهما أمكن نمذجة دالة الربح الخاصة بالمؤسسة كما يلي (الوحدة: 10^3دينار): $z = 4x - 0.1x^2 + 5y - 0.2y^2$.

حيث يرمز (x) إلى الكمية المنتجة من (A)؛ ويرمز (y) إلى الكمية المنتجة من (B) بالقنطار.

ويتطلب إنتاج القنطار الواحد من الغذاء (A) ساعة عمل، ويتطلب نظيره من (B) ساعتين. وتقدر الطاقة الإنتاجية للمؤسسة بـ: 50 ساعة يوميا.

المطلوب: تحديد الكميات المثلى المنتجة من كل نوع. وما مقدار الربح عندئذ؟

الحل:

1- من خلال معطيات التمرين يتضح أن المؤسسة تعمل في حالة تأكد نظرا للمعلومات المتوفرة عن دالة الربح وكذا القدرة الإنتاجية للمؤسسة، إضافة إلى عدم توفر معلومات عن ردود فعل تنافسي للمؤسسة، فهي تعمل في إطار سوق منافسة تامة، أو في حالة احتكار تام. ويتم حل هذه المشكلة باستخدام التقنيات الكلاسيكية وفق التحليل الحدي، علما أنه يوجد قيد على إنتاج المؤسسة متمثلا في العلاقة : $x + 2y = 50$

2- نعرف دالة لاغرانج حسب المعلومات المتوفرة كالآتي:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 4x - 0.1x^2 + 5y - 0.2y^2 + \lambda(50 - x - 2y)$$

أ) **الشرط اللازم:** لبلوغ الحد الأدنى لدالة التكاليف الكلية نستخرج المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج $\mathcal{L}$ بالنسبة للمتغيرات الثلاثة x ،y،λ وإعدامها على النحو التالي:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4 - 0.2x - \lambda = 0 \quad \dots (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 5 - 0.4y - 2\lambda = 0 \quad \dots (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 50 - x - 2y = 0 \quad \dots (3) \end{cases}$$

ومن المعادلتين (1) و(2) نحصل على:

$$\begin{cases} 4 - 0.2x = \lambda \quad \dots (4) \\ 5 - 0.4y = 2\lambda \quad \dots (5) \end{cases}$$

وبقسمة المعادلة (4) على المعادلة (5) نتخلص من المجهول λ فنجد:

$$\frac{4-0.2x}{5-0.4y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(4 - 0.2x) = 5 - 0.4y \Leftrightarrow y = x - \frac{15}{2}$$

وبتعويض قيمة y في المعادلة (3) نحصل على: $x + 2\left(x - \frac{15}{2}\right) = 50 \Leftrightarrow x = \frac{35}{2} =$

وبالتالي فإن: $x = 17.5$ وبإحلال هذه القيمة في المعادلة (3) نحصل على y=16.25

ب) **الشرط الكافي:** ستبلغ دالة الربح $z = 4x - 0.1x^2 + 5y - 0.2y^2$ قيمتها المثلى (قيمة حدية عظمى) عند استخدام التوليفة $(x^*, y^*) = (17.5,16.25)$ لأن المشتقات الجزئية الثانية لدالة التكلفة الكلية بالنسبة للمتغيرين x و y موجبة حيث:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = -0.2 < 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = -0.4 < 0 \end{cases}$$

ت) أما مقدار أقصى ربح ممكن تحققه المؤسسة فهو كما يلي:

$$Z(x^*, y^*) = 4(17.5) - 0.1(17.5)^2 + 5(16.25) - 0.2(16.25)^2 = 67.8125$$

ملاحظة: يمكن للطالب اتباع الطريقة الثانية بعد التعبير عن y بدلالة x ثم التعويض في دالة الربح Z.

حل التمرين (9) من السلسلة (1)

لدينا دالة الإشباع: $U_t = xyz$، ضمن دالة القيد المالي: $3600 - X - 2y - 3z = 0$

نشكل دالة لاغرانج: $Max\ \mathcal{L} = xyz + \lambda(3600 - x - 2y - 3z)$

1- الشرط اللازم: نشتق دالة لاغرانج $(\mathcal{L})$ بالنسبة للمتغيرات الأربعة x, y, z, λ فنجد:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz - \lambda = 0 & \dots(1) \\ xz - 2\lambda = 0 & \dots(2) \\ xy - 3\lambda = 0 & \dots(3) \\ 3600 - x - 2y - 3z = 0 & \dots(4) \end{cases}$$

وبقسمة المعادلة (1) على كل من المعادلتين (2) و(3) طرفا إلى طرف نحصل على الآتي:

$$\begin{cases} \frac{yz}{xz} = \frac{1}{2} \\ \frac{yz}{xy} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y & (5) \\ x = 3z & (6) \end{cases}$$

وبالتعويض في المعادلة (4) نجد: $3600 - 3x = 0$، بمعنى أن $x = 1200$ ومنه: $y = 600,\ z = 400$

وهذا يعني أنه عند استهلاك 1200 وحدة من السلعة x و 600 وحدة من y و 400 وحدة من z فإن المستهلك سيبلغ الوضع الأمثل له.

2- تحديد طبيعة الوضع الأمثل للمستهلك باستخدام الشرط الكافي:

وللتأكد من ذلك لابد من دراسة إشارات المحددات الجزئية للمصفوفة الهيسية والتي تمثل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لدالة لاغرانج بالنسبة للمتغيرات الأربعة x, y, z, λ.

المصفوفة الهيسية: $H = \begin{pmatrix} 0 & z & y & -1 \\ z & 0 & x & -2 \\ y & x & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$، ولهذه المصفوفات ثلاث محددات جزئية:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{vmatrix} = -z^2 < 0\ ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 2xyz > 0\ ,$$

أما المحدد الثالث فهو: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & z & y & -1 \\ z & 0 & x & -2 \\ y & x & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yz - 4xy - 6xz = -4320000$

إذن نلاحظ أن $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0\ ,\ \Delta_3 < 0$ وبالتالي نخلص إلى أن الشرط الكافي لتعظيم إشباع المستهلك قد تحقق.

<u>تمرين إضافي</u>

إذا كانت دالة الإشباع على النحو الآتي: $S = 2xy$، وكانت أسعار السلعتين $S = x, y$ على التوالي: $p_x = p_y = 2$

ما هو مستوى الدخل الذي يتعين على المستهلك إنفاقه للحصول على مستوى إشباع $S = 25$؟

الحل:

عند مستوى إشباع معين فإن هدف المستهلك يتمثل في العمل على تقليص الإنفاق الاستهلاكي، وفي هذه الحالة تهدف دالة لاغرانج إلى تدنية الدخل المخصص للاستهلاك. ويمكن صياغة إشكالية المستهلك رياضيا كما يلي:

$$\begin{cases} Min(R) = 2x + 2y \\ s/c:\ 2xy = 25 \end{cases}$$

وبالتالي يمكن كتابة دالة لاغرانج على النحو التالي: $Min\ \mathcal{L} = 2x + 2y + \lambda(25 - 2xy)$

1- الشرط اللازم للتدنية: نحسب المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج بالنسبة للمتغيرات الثلاث x, y, λ ونعدمها:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\lambda y = 0 \quad \ldots(1) \\ 2 - 2\lambda x = 0 \quad \ldots(2) \\ 25 - 2xy = 0 \ \ldots(3) \end{cases}$$

وبقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) طرفا إلى طرف نجد: $x = y$ وبالتعويض في المعادلة (3) يكون: $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

ويكون مستوى الدخل اللازم لهذا المستوى من الإشباع: $R = 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 10\sqrt{2}$

2- الشرط الكافي: للتحقق من أنه أدنى دخل ممكن يجب دراسة إشارات محددات الجزئية للمصفوفة الهيسية.

حيث: $H = \begin{pmatrix} 0 & -2\lambda & -2y \\ -2\lambda & 0 & -2x \\ -2y & -2x & 0 \end{pmatrix}$

المحددات الجزئية: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2\lambda \\ -2\lambda & 0 \end{vmatrix} = -4\lambda^2 < 0$ و $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2\lambda & -2y \\ -2\lambda & 0 & -2x \\ -2y & -2x & 0 \end{vmatrix} = -16\lambda xy < 0$

إذن إشارة المحددين Δ_1, Δ_2 معا سالبة، مما يعني أن الشرط الكافي لوجود نهاية صغرى قد تحقق، وبالتالي فإن مستوى الدخل $R = 10\sqrt{2}$ هو أدنى دخل ممكن؟