2.2- تقنية البرمجة الخطية (Linear Programming (L.P

تمهيد:

تمثل البرمجة الخطية أسلوبا رياضيا يساعد على استخدام كفء للموارد الاقتصادية المتاحة، إما بهدف تعظيم المنافع كالأرباح أو تدنية التكاليف، وتعتبر أداة يمكن للإدارة استخدامها في تسهيل عملية اتخاذ القرار.[1] وفي هذا الفصل سنتناول دراسة إيجاد الأمثلية باستخدام أسلوب البرمجة الخطية معتمدين على متباينات القيود المتوفرة وقيد الإيجابية التي سيتم توضيحها تباعا.

1.2.2- مفهوم وطبيعة تقنية البرمجة الخطية المقيدة:

عرفت البرمة الخطية عدة تعريفات نذكر منها:

- هي أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والمعاملات الثابتة[2].
- وهي ذلك الأسلوب الرياضي الذي يهدف إلى إيجاد أحسن استخدام للموارد المحدودة وفقا لمعيار أفضلية معين[3].

واستنادا إلى ما سبق، تعتبر تقنية (LP) طريقة رياضية تستخدمها المنشأة لغرض تحقيق أهدافها في الأمثلية مع وضع قيودها على شكل متباينات لا بصيغة متساويات. وهي تقنية مستخدمة في اتخاذ القرارات للمنشأة وإيجاد الحلول المثلى لأهدافها وفق محيط التأكد.

وقد ظهر استخدام البرمجة الخطية خلال فترة الحرب العالمية الثانية لحل مشاكل الأفراد والعتاد والوحدات العسكرية، وقد طور صيغتها الرياضي الروسي الأصل L.V. Kantorovich عام 1939م ثم طورها بعد ذلك الرياضي الأمريكي الأصل G.B. Dantzjg عام 1947م. ومن الاقتصاديين الذي طوعوا هذا الأسلوب في الدراسات الاقتصادية الاقتصادي الأمريكي "بول ساميلسون" و "دورفمان" و "روبرت سولو" وغيره. وقد كان لتطور الحواسيب والبرمجيات الأثر الكبير في تطوير هذه التقنية واستخدامها في مختلف علوم الحياة[4].

2.2.2- عرض استخدامات تقنية البرمجة الخطية:

تستخدم تقنية البرمجة الخطية في عدة مجالات أهمها: [5]

- تخطيط الإنتاج ووضع جدولة له في ضوء هدف اشباع الاحتياجات وقيود إمكانيات التصنيع؛
- وضع سياسة المخزون، حيث الهدف هو تدنية التكاليف في ظل قيود طاقة التخزين والاحتياجات؛
- إدارة محفظة الأوراق المالية بأفضل شكل، بحيث يتم تحقيق الهدف وهو تعظيم العائد على الاستثمار في ضوء القيود الخاصة بالمبالغ المخصصة للاستثمار في الأسهم والسندات كل على حده؛
- تعظيم تأثير الإعلان في صورة زيادة الطلب على منتجات أو خدمات الوحدة الاقتصادية في ضوء قيد المبالغ المخصصة للإعلان ككل، وأية قيود معروضة على ذلك؛
- تخطيط العلاقة بين مراكز الإنتاج ومنافذ توزيع المنتجات، حيث يتم تحقيق هدف تدنية تكاليف النقل في ضوء قيود طاقات مراكز الإنتاج وقيود احتياجات منافذ التوزيع.

وعموما، هناك اعتبارين أساسيين تركز عليهما التقنية (LP) هما:

- التحديد الواضح لطبيعة المشكلة والهدف المراد تحقيقه؛
- الوصول إلى حل فعلي لهذه المشكلة يدويا أو استعانة بالحاسب الآلي وهو الأفضل والأدق والأسرع.

3.2.2- فرضيات تقنية البرمجة الخطية:

تستند صياغة المشكلة الاقتصادية أو الإدارية باستخدام تقنية (LP) إلى عدة فرضيات، من أهمها:[6]

---

[1] فتحي رزق السوافيري، 2004م، بحوث العمليات- تطبيقات باستخدام الحاسب، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، ص18.

[2] عبد النور هبال، 2018م، رياضيات المؤسسة، دار الهدى للطباعة والنشر والتوزيع، ص 8.

[3] حنفي محمود سليمان، 1979م، المنهج المتكامل في الإدارة، دار الجامعات المصرية، الإسكندرية، مصر، ص 174.

[4] وليد إسماعيل السيفو وآخرين، الاقتصاد الإداري، مرجع سابق، ص 111.

[5] فتحي رزق السوافيري، 2004م، بحوث العمليات- تطبيقات باستخدام الحاسب، مرجع سابق، ص ص 18-19.

[6] وليد إسماعيل السيفو وآخرين، الاقتصاد الإداري، مرجع سابق، ص 113.

أولا- صياغة المشكلة بشكل دالة هدف (**OF**) Objective Function خطية؛
ثانيا- صياغة القيود في شكل دوال خطية وبصيغ متراجحات ويشار إليها اختصارا (St) Subject to؛
ثالثا- ثبات سعر المنتوج وأسعار المدخلات، أي أن التحليل ساكن (Static Analysis)؛
رابعا- ثبات وفورات الحجم (Constant Return to Scale)، أي ثبات دالة الإنتاج في المؤسسة المعنية. وهذا يعني أنه في حالة تغير كميات المدخلات من قبل المنشأة فإن إنتاجها سوف يتغير بنفس النسبة وبنفس اتجاه تلك المدخلات؛
خامسا- بناء على الفرضية (3 4) فإن الحل بطريقة البرمجة الخطية يعتبر حلا ساكنا في تلك الفترة الزمنية المحددة.

4.2.2- خطوات الوصول للأمثلية باستخدام البرمجة الخطية:

توجد عدة تقنيات أمام المنشأة للوصول إلى الأمثلية باستخدام تقنية LP منها طريقة الحل البياني وطريقة الحل الجبري وطريقة السمبلكس. وتتمثل خطوات الحل بطريقة البرمجة الخطية في الآتي:

أولا- صياغة دالة الهدف (OF) والقيود (ST) صياغة رياضية في صور متباينات $(\leq, \geq)$؛
ثانيا- التمثيل البياني لكل من دالة الهدف (OF) والقيود (ST)، وسنقوم بتوضيحه لاحقا؛
ثالثا- تحديد منطقة إمكانيات الحلول Feasibility Region؛
رابعا- الاهتمام بالنقط المتطرفة كنقاط مرشحة لأن تمثل الحل الأمثل.

ومن أجل تفحص خطوات تقنية البرمجة الخطية نتبع المثال الآتي:

تطبيق(1):

تنتج منشأة ما منتوجين هما (X) و (Y) وباستخدام ثلاث مدخلات (عناصر إنتاج) هي (1)، (2)، (3) وبكميات محددة لغرض إنتاج هذين المنتوجين من أجل تحقيق أعظم ربح ممكن $(Max: \pi)$. ووفق المعلومات المذكورة في الجدول أدناه:

المدخلات Input	المخرجات Output		كمية المدخلات المتاحة
	Q_X	Q_Y	
(1)	1	1	7 وحدات
(2)	0.5	1	5 وحدات
(3)	0	0.5	2 وحدان
ربح الوحدة الواحدة (المساهمة الربحية)	30	40	——

المطلوب:

1- حدد دالة الهدف OF، وعلاقات القيود ST، وصياغة مشكلة البرمجة الخطية LP.
2- إيجاد الحل الأمثل لكميات الإنتاج من المنتوجين لكي تحقق المنشأة هدفها وهو تعظيم الربح باستخدام تقنية LP.
3- توضيح فيما إذا استنفذت المنشأة كميات المدخلات ضمن منطقة الجدوى أو لم تستنفذها؟

الحل:

1- تحديد دالة الهدف والتي هي علاقة خطية تأخذ الشكل الآتي: $OF: Max\pi = 30Q_x + 40Q_y$
تحديد القيود:

- قيد المدخل (1) هو المتباينة $Q_x + Q_y \leq 7$ ويعني أن الكمية المستخدمة من المدخل (1) لإنتاج الوحدات Q_x، Q_y ينبغي أن تساوي أو تقل عن 7 وحدات من العنصر الإنتاجي (1).
- ونفس الشيء بالنسبة للمدخل (2) والمدخل (3) فيكون لدينا: $(2): 0.5Q_x + Q_y \leq 5$ و $(3): 0Q_x + 0.5Q_y \leq 2$
إضافة إلى شرط عدم السلبية (الإجابية) Non-Negativity والذي يعني: $Q_x, Q_y \geq 0$

وبالتالي يمكن صياغة مشكلة البرمجة الخطية على النحو التالي:

$$\begin{cases} OF: Max\pi = 30Q_x + 40Q_y \\ ST: \begin{cases} Q_x + Q_y \leq 7 & \dots(1) \\ 0.5Q_x + Q_y \leq 5 & \dots(2) \\ 0Q_x + 0.5Q_y \leq 2 & \dots(3) \\ Q_x, Q_y \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

2- لحل هذه المشكلة توجد ثلاثة طرق: الحل البياني، والحل الجبري، والحل بطريقة السمبلكس. وسيتم توضيح ذلك تباعا كما يلي:

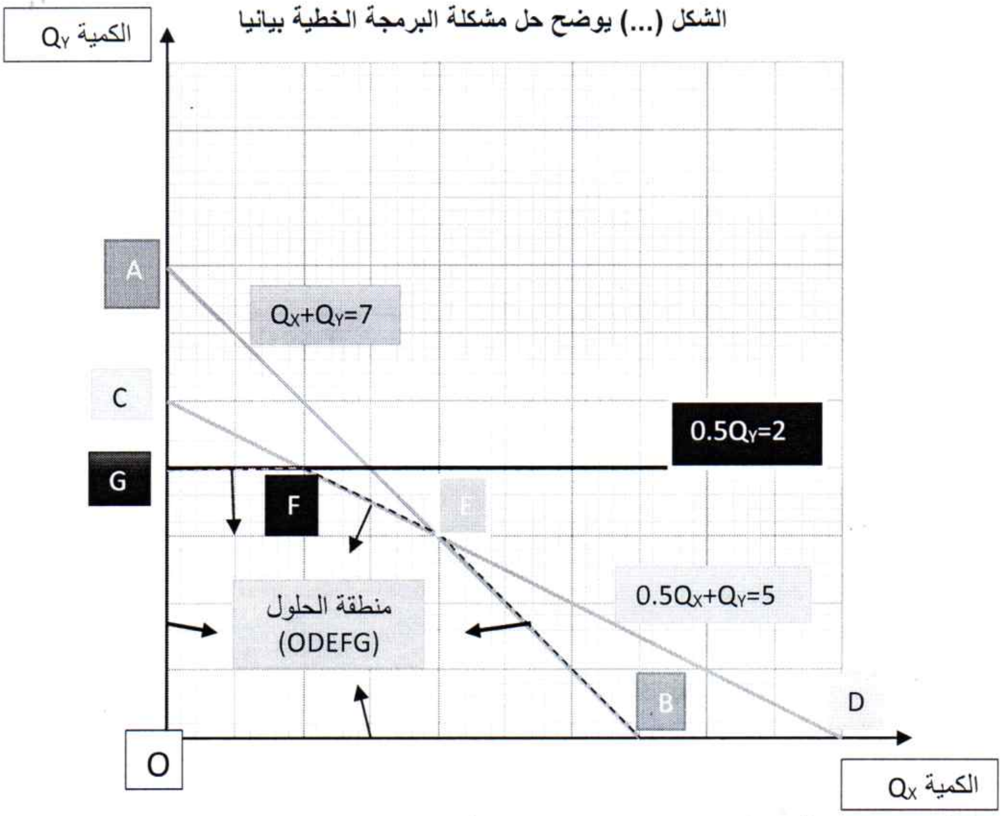
1.4.2.2- الحل البياني لمشكلة LP: Graphical Solution

تستخدم طريقة الحل البياني عادة لحل المشاكل الخطية التي لا يزيد عدد متغيراتها عن إثنين، ويتم رسم متباينات القيود المفروضة لتحديد نقطة في منطقة الحلول الممكنة Feasibility Region ثم اختيار أفضل نقطة تقع في منطقة الحلول الممكنة لتكون الحل الأمثل. وهي أسهل الطرق في معالجة مشكلة (LP). لكنها غير كفـءة لمعالجة مشكلة البرمجة الخطية في الحياة العملية.

1- معالجة متباينات القيود كأنها معادلات (متساويات)، أي:

- القيد (1): يصبح $Q_x + Q_y = 7$، ومن خلاله نحصل على نقطتين $A(0,7)$ ، $D(7,0)$. وهما كافيتان لرسم القيد (1).
- القيد (2): يصبح $0.5Q_x + Q_y = 5$، ومن ثم نحصل على نقطتين $C(0,5)$ ، $B(10,0)$. وهما كافيتان لرسم القيد (2)
- القيد (3): يصبح $0.5Q_y = 2$، ومن ثم نحصل على نقطتين $G(0,4)$ ، $F(2,4)$. وهما كافيتان لرسم القيد (3)

الشكل (...) يوضح حل مشكلة البرمجة الخطية بيانيا



2- **تحديد منطقة الحلول الممكنة Feasibility Region:** وتسمى أيضا بالمنطقة المثلى ×Optimality Region.

تركز البرمجة الخطية بالطريقة البيانية على النقط المتطرفة لمنطقة الحلول المثلى والمتمثلة في (O.G.F.E. D)، كونها تضم الحلول المثلى لهدف المنشأة وهو تعظيم الربح $Max(\pi)$ في هذا المثال مع الالتزام بكمية المدخلات المتاحة حسب ما توضحه القيود.

3- **حساب احداثيات النقط المكونة لمنطقة الحل الأمثل (O.G.F.E. D):** وخاصة احداثيات النقطتين E و F اعتمادا على تقاطع القيدين ((1) ، (2)) و((2) ، (3)). بمعنى حل جملتي المعادلات:

$$(E)\begin{cases} Q_x + Q_y = 7 & \dots(1) \\ 0.5Q_x + Q_y = 5 & \dots(2) \end{cases} \quad \text{و} \quad (F)\begin{cases} 0.5Q_x + Q_y = 5 & \dots(2) \\ 0.5Q_y = 2 & \dots(3) \end{cases}$$

فنحصل على ما يلي: $E(4,3)$ و $F(2,4)$

4- **النقطة المرشحة للحل الأمثل:** هي النقطة التي تحقق أقصى ربح: $Max(\pi) = 30Q_x + 40Q_y$

النقط المتطرفة	الربح $(\pi) = 30Q_x + 40Q_y$
O(0, 0)	$\pi = 30(0) + 40(0) = 0$
D(7, 0)	$\pi = 210$
E(4, 3)	$\pi = 240$
F(2, 4)	$\pi = 220$
G(0, 4)	$\pi = 160$

إذن الكمية من Q_x و Q_y التي تجعل الربح أعظميا هما احداثيي النقطة $E(4,3)$

2.4.2.2- الحل الرياضي (الجبري) لمشكلة البرمجة الخطية Mathematical Solution

يعتمد الحل الجبري على إدخال المتغير غير المستنفذ Slack Variable (SV). وأن الفكرة الأساسية التي يقوم عليها استخدام المتغير غير المستنفذ سببها هو أن طريقة الحل البياني السابق للبرمجة الخطية تعطي حلا أمثل لقرار المنشأة لتحقيق هدفها. إلا أنها لا تعطي معلومات عن وضعية المدخلات عما إذا ما قد استنفذت كميات المدخلات المتاحة أم لا.

ولإيجاد الحل الأمثل جبريا، فقد طورت طريقة الحل الجبري (أو ما تعرف بطريقة إدخال المتغيرات غير المستنفذة). ويكون التوصل للحل الأمثل بموجب هذه الطريقة كما يلي:

تطبيق(2) الحل بالطريقة الجبرية:

1- يحول النموذج الأصلي للبرمجة الخطية لمثالنا السابق:

$$\begin{cases} OF: Max\pi = 30Q_x + 40Q_y \\ ST: \begin{cases} Q_x + Q_y \le 7 & \dots(1) \\ 0.5Q_x + Q_y \le 5 & \dots(2) \\ 0Q_x + 0.5Q_y \le 2 & \dots(3) \\ Q_x, Q_y \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

إلى النموذج المحور بإدخال المتغيرات غير المستنفذة التي تحقق شرط عدم السلبية بحيث:

2- تتحول المتباينات في النموذج الأصلي إلى متساويات للحصول على النموذج الجديد $(S.V)$ التالي:

$$(S.V)\begin{cases} OF: Max\pi = 30Q_x + 40Q_y \\ ST: \begin{cases} Q_x + Q_y + S_1 = 7 & \dots(4) \\ 0.5Q_x + Q_y + S_2 = 5 & \dots(5) \\ 0.5Q_y + S_3 = 2 & \dots(6) \\ Q_x, Q_y, S_1, S_2, S_3 \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

والذي يتضمن خمس متغيرات مجهولة هي: Q_x, Q_y, S_1, S_2, S_3، وأربعة معادلات.

والمطلوب: إيجاد قيم هذه المجاهيل، وقد وفرت لنا طريقة البرمجة الخطية البيانية الحل الأمثل.

3- عدد المتغيرات المجهولة المفروض أن يساوي عدد المعادلات، وبالتالي يمكن إيجاد إحداثيات الحل الأمثل للمتغيرات المجهولة الخمسة: Q_x, Q_y, S_1, S_2, S_3 وفقا للخطوات التالية:

4- إيجاد الحل البياني وفق الطريقة السابقة: الحل البياني الأمثل هو عند النقطة E حيث: $(Q_x' Q_y) = (4,3)$

5- . وبالتعويض في معادلات النموذج الجديد $(S.V)$ نحصل على ما يلي:

$$\begin{cases} 4 + 3 + S_1 = 7 & \dots(7) \\ 0.5(4) + 3 + S_2 = 5 & \dots(8) \\ 0.5(3) + S_3 = 2 & \dots(9) \\ Q_x, Q_y, S_1, S_2, S_3 \ge 0 \end{cases}$$

.وبالتالي يكون لدينا: $(S_1' S_2' S_3) = (0,0,0.5)$.

وهذا يعني أنه قد تم استنفاذ كميات المدخلين (1) و (2)، أي أن $S_1 = S_2 = 0$ ، بينما لم تستنفذ كمية المدخل (3) حيث بقي منه نصف وحدة، أي $S_3 = 0.5$.

3.4.2.2-الحل البياني لمشكلة LP حالة تدنية التكاليف Cost Minimization

قد تسعى المنشأة لتحقيق أهدافها إلى تدنية التكاليف الكلية (TC) أو أدنى متوسط التكاليف الكلية (TC) أو أدنى تكلفة حدية (MC)عند ممارستها لنشاطاتها الإنتاجية أو التسويقية أو التوزيعية أو الاستثمارية وغيرها. وقد تلجأ المنشأة إلى أسلوب البرمجة الخطية من أجل تحقيق هذه الأهداف.

تطبيق (3):

نفترض أن مدير مطعم جامعة معينة يرغب في تحضير وجباته الغذائية المؤلفة من وجبة لحم ووجبة سمك بأقل تكلفة ممكنة، مع مراعاة متطلبات العناصر الغذائية وهي: البروتين (P)، المعادن (M)، والفيتامينات (V) في كل وجبة والمفروضة من قبل وزارة الصحة، ووفق الجدول المعطى أدناه:

العناصر الغذائية في كل وجبة غذائية	وجبة اللحم (Q_X)	وجبة السمك (Q_Y)	المتطلبات اليومية من العناصر
P	1	2	14
M	1	1	10
V	1	0.5	6
تكلفة الوجبة الواحدة	2 دينار	3 دينار	—

فإذا كانت تكلفة الوجبة الواحدة من اللحم ومن السمك هي (2) و (3) دينار على التوالي:

المطلوب: ما هي أدنى تكلفة ممكنة حتى توفر وجبات غذائية تلتزم بعناصر التغذية التي توصي بها وزارة الصحة؟

الحل: خطوات الحل باستخدام طريقة البرمجة الخطية حسب طريقة الحل البياني هي:

1- صياغة المشكلة بشكل نموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف لتدنية التكاليف

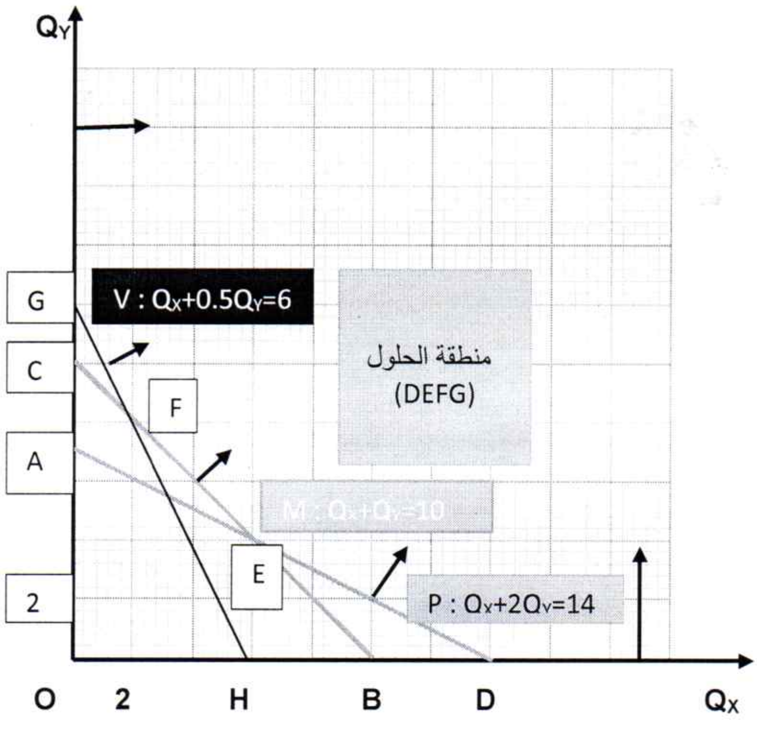
$$\begin{cases} OF: MinC = 2Q_x + 3Q_y \\ ST: \begin{cases} Q_x + 2Q_y \geq 14 & \dots (P) \\ Q_x + Q_y \geq 10 & \dots (M) \\ Q_x + 0.5Q_y \geq 6 & \dots (V) \\ Q_x, Q_y \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

2- باستخدام الحل البياني بطريقة LP، عندئذ نحتاج إلى تحديد النقط المتطرفة وهي: **D.E.F.G** والمرشحة لتعطي الحل الأمثل لمدير مطعم الجامعة. وباتباع نفس الخطوات السابقة في حالة تعظيم دالة الهدف، إلا أنه يؤخذ في الاعتبار تغيير اتجاه المتباينات ووفقا للخطوات التالية:

أ) القيد (P): يصبح $Q_x + 2Q_y = 14$، ومن خلاله نحصل على نقطتين $A(0,7)$ ، $D(14,0)$.
القيد (M): يصبح $Q_x + Q_y = 10$، ومن ثم نحصل على نقطتين $C(0,10)$ ، $B(10,0)$.
القيد (V): يصبح $Q_x + 0.5Q_y = 6$، ومن ثم نحصل على نقطتين $G(0,12)$ ، $H(6,0)$.

نقوم برسم الخطوط الثلاثة (AD)، (BC)، (GH) لنحصل على منطقة إمكانية الحل الأمثل والمكونة من النقط **D.E.F.G** كما هو موضح في التمثيل البياني

الشكل (...) يوضح منطقة إمكانية الحل الأمثل لمطعم الجامعة



ب) **حساب احداثيات النقط المكونة لمنطقة الحل الأمثل (G.F.E. D)**: وخاصة احداثيات النقطتين E و F اعتمادا على تقاطع القيدين $((M)\text{ ، }(P))$ و$((V)\text{ ، }(M))$. بمعنى حل جملتي المعادلات:

$$(F)\begin{cases} Q_x + Q_y = 10 \quad \dots (M) \\ Q_x + 0.5Q_y = 6 \dots (V) \end{cases} \quad \text{و} \quad (E)\begin{cases} Q_x + 2Q_y = 14 \quad \dots (P) \\ Q_x + Q_y = 10 \quad \dots (M) \end{cases}$$

فنحصل على ما يلي: $E(6,4)$ و $F(2,8)$

ت) تقدير (حساب) التكلفة عند كل نقطة من النقط المتطرفة D.E.F.G فيكون لدينا:

ث) **النقطة المرشحة للحل الأمثل:** هي النقطة التي تحقق أدنى تكلفة

$$Min(C) = 2Q_x + 3Q_y \quad \rightarrow Objective\ Function$$

النقط المتطرفة	التكلفة $(C) = 2Q_x + 3Q_y$
D(14, 0)	$C = 2(14) + 3(0) = 28$
E(6, 4)	$C = 24$
F(2, 8)	$C = 28$
G(0, 12)	$C = 36$

إذن الكمية من Q_x و Q_y التي تجعل التكلفة دنيا هما احداثيي النقطة $E(4,3)$.

وعندها سيتخذ مدير المطعم القرار المتمثل في إعداد (6) وجبات لحم و (4) وجبات سمك وبتكلفة مقدارها (24) دينار. وهي تمثل حلا أمثلا لمدير المطعم بحيث أنه يكون قد التزم بالمتطلبات اليومية لعناصر التغذية المتمثلة في البروتين والمعادن والفيتامينات.

3.4.2.2- حل مشكلة البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس:

توجد طريقة ثالثة لحل مشكلة البرمجة الخطية، عدا طريقتي الحل البياني والحل الجبري، تسمى طريقة السمبلكس Simplex Solution وهي مدرجة ضمن برنامج مقياس "رياضيات المؤسسة" أو ما يدعى بـ: "بحوث العمليات"، فهي خارج هذا البرنامج.

تمرين (1):

تنتج إحدى المؤسسات المتخصصة نوعين من المحاليل الكيميائية، يستدعي مرور كل منها بثلاثة أقسام إنتاجية على التوالي لغرض تصنيفها والوقت اللازم لكل قسم إنتاجي وربح المنتوج كما هو في الجدول الآتي:

نوع المنتوج Out put	الأقسام الإنتاجية I	II	III	ربح الساعة (بالدينار)
A	10	6	4.5	9
B	5	6	18	7
الساعات المتاحة لكل قسم (الطاقة)	50	36	81	ــــــ

المطلوب: احسب كمية الإنتاج الممكنة من كل محلول بحيث تحقق المؤسسة أكبر ربح ممكن.

تمرين (2): لو تتبعنا مشكلة تحديد مزيج الإنتاج لمصنع علب تغليف يمر منتوجه الذي ينتج بنوعين لثلاث مكائن وبالأوقات المبينة في الجدول المقابل:

الماكنة	الوقت اللازم لإنتاج وحدة واحدة من: المنتوج الثاني	المنتوج الأول	الوقت المتاح للماكنة بالدقيقة
التقطيع	3	5	6000
الطباعة	4	2	4000
التجميع	5	1	4000
ربح الوحدة (دينار)	40	30	ــــــ

المطلوب: احسب كمية الإنتاج التي تعظم الربح.