1.2- النماذج (التقنيات) الرياضية لاتخاذ القرارات
Techniques Optimal Solution

تمهيد:

تسعى أي منشأة إلى تحقيق هدف من أهدافها، وهو ما يتطلب منها اتخاذ قرار معين يتميز بالعناصر الآتية:

1- هل أن القرار متخذ في إطار الفردية (مثل الاحتكار) أو في إطار جماعي أو يأخذ في الاعتبار ردة فعل الآخرين (مثل المنافسة الاحتكارية)؛
2- أن يسعى صاحب القرار للوصول إلى مخارج (Output)؛
3- أن يواجه صاحب القرار على الأقل استراتيجيتين لتحقيق المخارج؛
4- قد يصادف وجود شك في مصداقية الاستراتيجية الموضوعة من أجل تحقيق المخرج المطلوب؛
5- على صاحب القرار معرفة كل العوامل المؤثرة على صنع القرار، إلا أنه لا يمكنه مراقبة كل هذه العوامل.

وسوف نتطرق إلى التقنيات التي يستخدمها صانع القرار في اتخاذ قراراته، وصولا لأهداف منشأته.

1.1.2-مفهوم تقنيات (أو نماذج) اتخاذ القرار وحالاته

تقنيات اتخاذ القرار أو (الحل الأمثل) هي: الوسائل الرياضية والإحصائية والقياسية التي طورت من قبل النظرية الاقتصادية بشقيها الجزئي والكلي لاستخدامها في صنع قرارات المنشأة بهدف تحقيق الحلول المثلى لقراراتها، مع وجود منهجية[1] متبعة لتحقيق ذلك[2].

وبناء عليه، فإن التقنية اللازمة اتباعها لتحقيق هدف المنشأة بمقتضى نوعية القرار (فردي أو جماعي) إضافة إلى محيط القرار، فإذا كان لدينا:

أولا- حالة التأكد والقرار فردي: في هذه الحالة يمكن استخدام إحدى الطرق الكلاسيكية لإيجاد الحل الأمثل، ويعتبر التحليل الحدي Marginal Analysis إحدى هذه الطرق التي تعتمد على دالة هدفية بلا قيود.
ثانيا- حالة عدم التأكد والقرار فردي أو جماعي: في هذه الحالة يلجأ إلى استخدام تقنيات نظرية الألعاب (Games Theory).
ثالثا- حالة المخاطرة والقرار فردي أو جماعي: في هذه الحالة نلجأ إلى استخدام تقنيات نظرية القيود (Contracts Theory).

2.1.2- الحل الأمثل وفق الطرق الكلاسيكية

وهذا الحل يشمل الحالات الآتية:

أولا- حالة التأكد مع القرارات الفردية: ويتضمن كل من العنصرين تحديد "دالة الهدف" وتحديد "قيود المنشأة".

وهذه أيضا تأخذ حالتين هما:

1. **الحل الأمثل غير المقيد:** ويكون فيها تحديد الهدف دون وجود قيود، والتقنية اللازمة لها هي التحليل الحدي Marginal Analysis.
2. **الحل الأمثل المقيد:** ويتضمن تحديد دالة الهدف مع وجود القيود، وهذه الأخيرة تتمثل في:

أ-شكل متساويات (=) Equalities، والتقنية اللازمة هي طريقة لاغرانج (Lagrangian Method).

ب-شكل متباينات ($\leq$ ، $\geq$)، والتقنية اللازمة هي طريقة البرمجة الخطية وغير الخطية Linear and non-Linear Methods

ثانيا- حالة عدم التأكد مع القرارات الفردية: في هذه الحالة، التقنية المستخدمة هي طرق الاقتصاد القياسي الذي يعتمد التقدير فيه على استخدام المتغير العشوائي (حد الخطأ ε_i).

3.1.2- الحل الأمثل حسب طريقة التحليل الحدي (محيط التأكد)

ويتم الوصول إلى الحل الأمثل بموجب التحليل الحدي في حالتين هما:

---

[1] **المنهجية**: تعني هنا آلية خطوات اتخاذ القرارات من قبل المنشأة سعيا لتحقيق أهدافها المثلى بأسلوب مناسب. ومن أهم خطوات تحديد المنهجية هي معرفة وتحديد محيط عمل المنشأة.

[2] وليد إسماعيل السيفو وآخرون، 2007م، **الاقتصاد الإداري- مدخل كمي في استراتيجية اتخاذ القرار**، الطبعة العربية الأولى، الأهلية للنشر والتوزيع: ص 81.

1- **دالة الهدف المتضمنة لمتغير واحد وبدون قيد** وتسمى Unconstrainned Optimization، ويعتمد حل هذا النموذج على مفهوم الحدية Marginal، ويقصد به مقارنة منافع النشاط الإضافي مع تكاليف النشاط الإضافي. وبالتالي فإن التحليل الحدي هو طريقة معالجة قرارات المنشأة بمقتضى قاعدة "المنفعة/ التكلفة" (benefit/ cost) بحيث أن نشاط المنشأة يبلغ أقصاه عندما يتحقق شرط تساوي المنفعة الحدية مع التكلفة الحدية (MC=MR).

ولتوضيح طريقة التحليل الحدي نأخذ المثال التالي:

مثال:

نفترض أن منشأة إسمنت في إحدى الدول تهدف إلى تعظيم ربحها وقد توفرت المعلومات التالية:

دالة الإرادات الكلية: $TR=45Q- 0.5Q^2$

دالة التكاليف الكلية: $TC=Q^3-8Q^2+57Q+2$

المطلوب:

1- حدد دالة الهدف للمنشأة Objective Function (OF) وصغها جبريا.
2- حدد قرار المنشأة لمستوى الإنتاج الذي يعظم الربح (دالة الهدف).
3- حدد مستوى الربح الذي يعطي المنشأة الحل الأمثل.
4- ما هو مفهوم الربح الحدي Marginal profit؟

الحل:

....

....

تذكير

مفاهيم أساسية من النظرية الاقتصادية الجزئية

- الإيراد الكلي (TR) هو دالة للسعر (P) في الكمية (Q)، ويصاغ رياضيا كالآتي: $\boldsymbol{TR = P.Q}$
- التكلفة الكلية (TC) هي دالة لإجمالي التكلفة الثابتة (TFC) مضافا إليها إجمالي التكلفة المتغيرة (TVC) وتصاغ رياضيا كالآتي: $\boldsymbol{TC = TFC + TVC}$
- متوسط التكلفة (AC) هي حاصل قسمة التكلفة الكلية على حجم الإنتاج (Q) وتصاغ رياضيا: $\boldsymbol{AC = TC/Q}$
- الإيراد الحدي هو مشتق الإيراد الكلي بالنسبة للإنتاج ويصاغ رياضيا كالآتي: $\boldsymbol{MR = dTR/dQ}$
- التكلفة الحدية هي مشتق التكلفة الكلية بالنسبة للإنتاج وتصاغ رياضيا كالآتي: $\boldsymbol{MC = dTC/dQ}$

تطبيق

إذا كانت دالة الطلب لمنتجات منشأة ما تأخذ الشكل الآتي: $P = 24 - 3Q$

وكانت دالة التكاليف لها كالآتي: $TC = Q^3 - 3Q^2 - 24Q + 100$

1- حدد المفاهيم الأساسية التالية: الإيراد الكلي، اجمالي التكلفة الثابتة وإجمالي التكلفة المتغيرة، ومتوسط التكلفة الكلية.
2- حدد مستوى الإنتاج (Q^*) الذي يحقق أقصى ربح ممكن (π)
3- حدد كل من الإيراد الحدي، والتكلفة الحدية عند حجم الإنتاج (Q^*).

الحل:

....

....

2- **دالة الهدف المتضمنة لمتغيرين أو أكثر وبدون قيد:** في هذه الحالة يمكن صياغة نموذج غير خطي، وفي محيط التأكد، على الشكل التالي: $Opt: z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ونقوم بتحديد النقطة الحدية (صغرى أو عظمى) نستعين بمفهومين هما:

شعاع المشتقات الجزئية الأولى "Gradient": $\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial X_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial f(X)}{\partial X_n}\right)$ حيث: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

المصفوفة الهيسية "Hessian Matrix": هي المصفوفة المربعة للمشتقات الجزئية الثانية

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث تتحدد عناصرها على النحو التالي: $h_{ij} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j}$

والسؤال الذي نطرحه: هل النقطة المثلى التي يتم تحديدها هي نقطة مثلى محلية أم شاملة؟ بعبارة أخرى كيف نضمن أن الأمثلية المحلية هي أمثلية شاملة؟ والحقيقة ثمة خاصية هندسية هامة نلخصها فيما يلي:

إذا كانت دالة الهدف إما محدبة أو مقعرة فإن الأمثلية المحلية هي أمثلية شاملة.

وفي حالة دالة ذات متغيرين $(x, y) \rightarrow f((x, y))$ يمكننا الاستعانة بالجدول التالي لمعرفة ما إذا كانت الدالة محدبة (تقبل نهاية صغرى) أم مقعرة (تقبل نهاية عظمى).

شكل الدالة / المقدار	مقعرة	محدبة
$\|H\|$	$0 \leq$	$0 \leq$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$	$0 \leq$	$0 \geq$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$	$0 \leq$	$0 \geq$
النتيجة	نقطة نهاية صغرى	نقطة نهاية عظمى

حيث $|H|$: هو محدد Determinant المصفوفة الهيسية.

مثال:

لنفترض أن منشأة تنتج سلعتين هما التلفزيونات (x) والمراوح (y) وكان ربح المنشأة تحددها الدالة الآتية:

$$f(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$$

فإذا كانت المنشأة تهدف إلى تعظيم ربحها دون قيد على كميات الإنتاج.

المطلوب: 1- أعط صياغة لنموذج يوافق سلوك المنشأة.

2-حدد كميات الإنتاج التي تحقق تعظيم الربح.

الحل:

....

....

4.1.2- الحل الأمثل لنموذج غير خطي مقيد Constrained Optimization (محيط التأكد)

فيما سبق درسنا أمثلية نموذج غير خطي دون قيد على المتغيرين (x)، (y) وليكن: $z = f(x, y)$، وذلك غير واقعي في العديد من الحالات الاقتصادية. فإذا كان على المؤسسة أن تواجه قيدا ما " $g(x, y) = k$ " (قيد مرتبط بكمية المدخلات، أو بسعة إنتاج المنشأة، أو بالتشريعات الضريبية، أو البيئية،...) فإننا نحصل على البرنامج غير الخطي التالي:

$$Opt: f(x, y) \ \& \ s/t : g(x, y) = k$$

أو

$$Opt: f(x, y) \ \& \ s/c : g(x, y) = k$$

حيث أن الدالة f تعبر عن دالة الهدف؛ وتعبر الدالة g عن دالة القيد المطلوب احترامه.

أولا- المعالجة الرياضية لدالة هدف بوجود قيد:

سنبدأ بمعالجة مثال بسيط لمعرفة كيفية الحصول على الوضع الأمثل لدالة تشمل متغيرين مع وجود قيد عليهما.

مثال:

بافتراض أننا نريد الحصول على النهاية الحدية لدالة الهدف التالية: $z = -2x^2 + y^2 \quad ...(1)$

تحت القيد التالي: $y - 2x + 1 = 0 \quad ...(2)$

حدد طبيعة نقطة الحرجة (النهاية الحدية) لهذا النموذج المقيد.

الحل:

....

....

ثانيا- الأمثلية المقيدة ومضاعف لاغرانج (محيط التأكد)
Constrained Optimization with Lagrange Multiplier

قد يواجه حل مشاكل الأمثلية المقيدة بطريقة التعويض صعوبة إحلال دالة القيد في دالة الهدف أو بسبب وجود أكثر من قيد، في هذه الحالة نلجأ إلى ما يعرف بمضاعف لاغرانج كونها تمكننا من التعامل مع القيود غير الخطية، وكذا التعامل مع الدوال التي تحتوي على أكثر من متغيرين.

حل البرنامج: $Opt: f(x,y)\ \&\ s/t: g(x,y) = k$ **بطريقة لاغرانج**

1- نكون دالة جديدة $\mathcal{L}$ (لاغرانج) حسب الخطوات التالية:
- نساوي دالة القيد للصفر فتصبح: $k - g(x) = 0$
- نضرب دالة القيد بـ: العدد (λ) مضاعف لاغرانج فنحصل على $\lambda g(x)$
- نجمع الناتج في الخطوة الثانية مع الدالة $f(x,y)$ للحصول على دالة لاغرانج التالية:

$$\mathcal{L}\,(x,y,\lambda) = f(x\ y) + \lambda[k - g(x,y)]$$

2- نحسب المشتقات الجزئية لدالة لاغرانج $\mathcal{L}$ بالنسبة للمتغيرات x، y، λ على التوالي ونساويها للصفر.

3- نحل جملة المعادلات $\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases}$ لتحديد قيمة كل متغير من المتغيرات x، y، λ.

مثال (1)

ما هو الحل الأمثل لدالة كوب- دوجلاس للإنتاج التالية: $Q = K^{0.4}.L^{0.5}$

علما أن قيد الميزانية (Bugedet Constraint) هو 180 دينار، وأن سعر رأس المال $p_K = 3$ وسعر العمل $p_L = 4$

الحل:

....

....

....

مثال (2):

إذا كانت دالة الإشباع على النحو التالي: $S = xy$، وأن سعري السلعتين x و y هما $p_x = p_y = 2$.

فما هو مستوى الدخل الذي يتعين على المستهلك إنفاقه للحصول على مستوى إشباع $S = 25$؟

الحل:

....

....

....

تطبيق (1):

تنتج مؤسسة نوعين من أغذية الأنعام (A) و (B) وبدراسة سلوك الربح المتحقق من ربيعهما أمكن نمذجة دالة الربح الخاصة بالمؤسسة كما يلي (الوحدة: 10^3دينار): $z = 4x - 0.1x^2 + 5y - 0.2y^2$.

حيث يرمز (x) إلى الكمية المنتجة من (A)؛ ويرمز (B) بالقنطار.

ويتطلب إنتاج القنطار الواحد من الغذاء (A) ساعة عمل، ويتطلب نظيره من (B) ساعتين. وتقدر الطاقة الإنتاجية للمؤسسة بـ: 50 ساعة يوميا.

المطلوب: تحديد الكميات المثلى المنتجة من كل نوع.

الحل:

....

....

....

تطبيق (2):

إذا كانت دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين الذي يستهلك ثلاثة أنواع من السلع: x، y، z معطاة بالشكل التالي: $U_T = xyz$

ضمن القيد المالي: $x + 2y + 3z = 3600$.

1- أوجد الكميات المستهلكة من كل سلعة حتى يكون المستهلك في وضعه الأمثل.
2- حدد طبيعة الوضع الأمثل للمستهلك باستخدام الشرط الكافي.