Corrigé de la série 2

Exercice 1

a) Les intervalles de codage sur 8 bits et sur 16 bits :

	S/VA	CA1	CA2
1 octet	$[-(2^7-1), +(2^7-1)]$	$[-(2^7-1), +(2^7-1)]$	$[-2^7, +(2^7-1)]$
2octets	$[-(2^{15}-1),+(2^{15}-1)]$	$[-(2^{15}-1), +(2^{15}-1)]]$	$[-2^{15}, +(2^{15}-1)]$

b) $-(512)_{10}=-(100000000)_2$ on ne peut pas coder cette valeur sur un octet, pour l'encoder il faut au minimum 2 octets :

$-(512)_{10}=-(0000000100000000)_2=(1000000100000000)_{SVA}$ sur 2 octets

c)

Décimal	Binaire	S/VA	CA1	CA2
+27	+(00011011)	00011011	00011011	00011011
-45	-(00101101)	10101101	11010010	11010011
-117	-(01110101)	11110101	10001010	10001011
-128	-(10000000)	impossible	impossible	10000000
-86	-(01010110)	11010110	10101001	10101010
-14	-(00001110)	10001110	11110001	11110010

Exercice 2

a) **$(-4)_{10}= (\ ?)_{16\ \text{cà1}}$ sur 1 octet** ça veut dire sur 8 bits. Premièrement il faut écrire -4 en binaire simple sur 8 bits: $(-4)_{10} = -(0000\ 0100)_2$.

Pour trouver son complément à 1 on inverse tous les bits puisque c'est un nombre négatif :

$(-4)_{10} = (1111\ 1011)_{\text{cà1}}$ pour trouver le nombre en hexadécimale on regroupe les chiffres et donc

$(-4)_{10} = (\text{F} \quad \text{B})_{\text{cà1 Hexadécimal}}$

$(-4)_{10}= (\ ?)_{16\ \text{cà1}}$ sur 2 octets

$(-4)_{10} = -(0000\ 000\ 0000\ 0100)_2$ et même chose pour trouver son complément à 1 on inverse tous les bits puisque c'est un nombre négatif :

$(-4)_{10} = (1111\ 1111\ 1111\ 1011)_{\text{cà1}}$ pour trouver le nombre en hexadécimale on regroupe les chiffres et donc $(-4)_{10} =(\text{F} \quad \text{F} \quad \text{F} \quad \text{B})_{\text{cà1 Hexadécimal}}$

$(+4)_{10}= (\ ?)_{16\ \text{cà1}}$ sur 1 octet

Premièrement il faut écrire +4 en binaire simple sur 8 bits: $(+4)_{10} = +(0000\ 0100)_2$.

Et puisque c'est un nombre positif la représentation en cà1 reste la même on n'inverse pas les bits il suffit seulement de vérifier que le nombre appartient à l'intervalle de codage des nombres cà1 sur 8 bits

Et donc

$(+4)_{10} = (0000\ 0100)_{\text{cà1}}$ pour trouver le nombre en hexadécimale on regroupe les chiffres et donc

$(+4)_{10} = (0 \quad 4)_{\text{cà1 Hexadécimal}}$

$(+4)_{10}= (\ ?)_{16\ \text{cà1}}$ sur 2 octets Même chose

$(+4)_{10} = (0000\ 0000\ 0000\ 0100)_{\text{cà1}}$ pour trouver le nombre en hexadécimale on regroupe les chiffres

$(+4)_{10} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 4)_{\text{cà1 Hexadécimal}}$

b) **1. $(AA)_{16\ SVA} = (\ ?)_{16\ \text{cà1}}= (\ ?)_{16\ \text{cà2}}$**

$(AA)_{16\ SVA}$ $= (1010\ 1010)_{SVA}=-(0010\ 1010)_2$ puisque le bit de poids fort est 1 donc c'est un nombre négatif, on trouve sa valeur en binaire puis on le code en cà1 en inversant les bits et en cà2 en inversant les bits après le premier un :

$(AA)_{16\ SVA}$ $= (1010\ 1010)_{SVA}=-(0010\ 1010)_2 =(11010101)_{\text{cà1}} =(11010110)_{\text{cà2}}$

$=(\text{D} \quad 5)_{\text{cà1 Hexa}}=(\text{D} \quad 6)_{\text{cà2 Hexa}}$

2. $(FF)_{16\ SVA}$ $= (1111\ 1111)_{SVA}=-(0111\ 1111)_2 =(1000\ 0000)_{\text{cà1}} = (1000\ 0001)_{\text{cà2}}$

$= (8 \quad 0)_{\text{cà1 Hexa}}=(8 \quad 1)_{\text{cà2 Hexa}}$

c) Que vaut le code (C0) 16

1. s'il s'agit d'un nombre non signé ?

$(C0)_{16}=(1100\ 0000)_2=(192)_{10}$

2. s'il s'agit d'un nombre signé ?

---> S'il s'agit d'une représentation SVA alors $(C0)_{16\ SVA}=(1100\ 0000)_{2\ SVA}= -\ (0100\ 0000)_2 = (-\ 64)_{10}$

--->S'il s'agit d'une représentation CA1 alors $(C0)_{16\ cà1}=(1100\ 0000)_{2\ cà1}= -\ (0011\ 1111)_2 = (-\ 63)_{10}$

---> S'il s'agit d'une représentation CA2 alors $(C0)_{16\ cà2}=(1100\ 0000)_{2\ cà1}= -\ (0100\ 0000)_2 = (-\ 64)_{10}$

d) $(FFFF)CA1 =(1111\ 1111\ 1111\ 1111)_{2\ cà1}= -\ (0000\ 0000\ 0000\ 0000)_2 = -\ (0)_{10}$

$(7FFF)CA1 =(0111\ 1111\ 1111\ 1111)_{2\ cà1}= +\ (0111\ 1111\ 1111\ 1111)_2 = +\ (32767)_{10}$

$(8000)CA2 =(1000\ 0000\ 0000\ 0000)_{2\ cà2}= -\ (1000\ 0000\ 0000\ 0000)_2 = -\ (32768)_{10}$

$(00FF)CA2 =(0000\ 0000\ 1111\ 1111)_{2\ cà2}= +\ (0000\ 0000\ 1111\ 1111)_2 = +\ (255)_{10}$

Exercice 3

Les additions en complément à 2 sur 6 bits:

$(107)10 + (-67)10 =(?)_{cà2}$

$(107)_{10} =\ (01101011)cà2$

$(-67)_{10} = -(01000011)2 = (10111101)cà2$

```
 ¹0 ¹1 ¹1 ¹0 ¹1 ¹0 ¹1 1
+ 1  0  1  1  1  1  0 1
________________________
=(1|0  0  1 0  1  0  0 0)cà2
```

retenue

$=+(00101000)_2 = (+\ 40)_{10}$

$(-106)_{10} + (-5)_{10} =(?)_{cà2}$

$(-106)_{10} =-(01101010)_2 =(10010110)_{cà2}$

$(-5)_{10} =-(00000101)_2 =(11111011)_{cà2}$

```
  ¹1 ¹0 ¹0 ¹1 ¹0 ¹1  1  0
+  1  1  1  1  1  0  1  1
__________________________
=(1|1  0  0  1  0  0  0  1)cà2
```

retenue

$=-(01101111)_2 = (-111)_{10}$

$(111)_{10} + (25)_{10}$

$(111)_{10} = +(01101111)_2 = (01101111)_{cà2}$

$(25)_{10}= +(00011001)_2 = (00011001)_{cà2}$

```
  ¹0 ¹1 ¹1 ¹0 ¹1 ¹1 ¹1  1
+  0  0  0  1  1  0  0  1
__________________________
```

$=(\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)_{cà2}$: Nombre négatif illogique puisqu'on n'a que des entiers positifs

La cause est que la somme des deux nombres n'appartient pas à l'intervalle de codage de cà2 sur 8 bits qui est **[-128,+127]** est le résultat est **$(111)_{10} + (25)_{10}$ = 136**.

$(-126)_{10}$ + $(-85)_{10}$

$(-126)_{10}$ $=-(01111110)_2 = (10000010)_{cà2}$

$(-85)_{10}$ $=-(01010101)_2 = (10101011)_{cà2}$

^{1}1 0 0 0 0 ^{1}0 1 0

\+ 1 0 1 0 1 0 1 1

=(1 | 0 0 1 0 1 1 0 1)$_{cà2}$

retenue

: Nombre positif illogique puisqu'on n'a que des entiers négatifs

La cause est que la somme des deux nombres n'appartient pas à l'intervalle de codage de cà2 sur 8 bits qui est **[-128,+127]** est le résultat est **$(-126)_{10}$ + $(-85)_{10}$ = -211**.

Exercice 4

1. Représenter en virgule flottante (IEEE 754 simple précision) les nombres réels suivants :

$(+45)_{10}$ $(-160.75)_{10}$ $(-32.625)_{10}$ $(+13.5)_{10}$

$(+45)_{10} = +(101101)_2 = +(1.01101)_2 * 2^{+5}$

La mantisse M= $(01101)_2$

Le signe = 0 (positif)

L'exposant réel E_r = 5 donc l'exposant biaisé $E_b = E_r$+127 = 5 + 127 = 132

$E_b=(10000100)_2$

Et alors la représentation en virgule flottante (IEEE 754 simple précision) est :

0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

S E_b M

$(-160.75)_{10}$ $= -(10100000.01)_2$

0.75 * 2 = 0.50

0.50* 2 = 1.0

$(160)_{10} = (10100000)_2$ en utilisant la division successive

$-(10100000.01)_2 = -(1.010000001)_2 * 2^7$

s=1 M= $(010000001)_2$ Er=7, Eb=Er+127=7+127=134=$(10000100)_2$

Et alors la représentation en virgule flottante (IEEE 754 simple précision) est :

1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

S E_b M

$(-32.625)_{10}$ $= -(100000.101)_2 = -(1.00000101)_2 * 2^{+5}$

0.625 * 2 = 1.250

0.25*2 = 0.50

0.50*2 = 1.0

La mantisse M= $(000000101)_2$

Le signe = 1 (négatif)

L'exposant réel E_r = 5 donc l'exposant biaisé $E_b = E_r$+127 = 5 + 127 = 132

$E_b=(10000100)_2$

Et alors la représentation en virgule flottante (IEEE 754 simple précision) est :

1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

S E_b M

$(+13.5)_{10}$ $= -(1101.1)_2 = -(1.1011)_2 * 2^{+3}$

0.50*2 = 1.0

La mantisse M= $(1011)_2$

Le signe = 1 (négatif)
L'exposant réel $E_r = 3$ donc l'exposant biaisé $E_b = E_r+127 = 3 + 127 = 130$
$E_b=(10000010)_2$
Et alors la représentation en virgule flottante (IEEE 754 simple précision) est :

1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

S E_b M

2. Convertir en décimal les nombres suivants (écrits en IEEE 754 simple précision):

$$\mathbf{(17BE0000)_{16}} = (\underbrace{0}_{S}\underbrace{001\ 0111\ 1}_{E_b}\underbrace{011\ 1110\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000}_{M})$$

$E_b = (00101111)_2 = E_r + 127 \Longrightarrow E_r = E_b - 127 = 47\text{-}127= -80$

$\mathbf{(17BE0000)_{16}} = + (1.011111)_2 * 2^{-80} = + (1011111)_2 * 2^{-74} = (+ 95) * 2^{-74}$

$$\mathbf{(C3F00000)_{16}} = (\underbrace{1}_{S}\underbrace{100\ 0011\ 1}_{E_b}\underbrace{111\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000}_{M})$$

$E_b = (10000111)_2 = E_r + 127 \Longrightarrow E_r = E_b - 127 = 135\text{-}127= + 8$

$\mathbf{(C3F00000)_{16}} = + (1.111)_2 * 2^{+8} = + (1111)_2 * 2^{+5} = (+ 15)_{10} * 2^{+5} = (480)_{10}$

Exercices supplémentaires

Exercice 1

1. Coder sur 4 bits les entiers **+7, +2, 0, −2, −7 et −8, +8** avec les représentations suivantes :
   - Signe et valeur absolue :

     +7=0111 ; +2=0010 ; 0=0000 ou 1000 ; -2=1010 ; -7=1111 ;

     -8 et +8 n'est pas représentable sur 4 bits

   - Complément à 1 (Cà1);

     +7=0111 ; +2=0010 ; 0=0000 ou 1111 ; -2=1101 ; -7=1000 ;

     -8 et +8 n'est pas représentable sur 4 bits

   - Complément à 2 (Cà2) :

     +7=0111 ; +2=0010 ; 0=0000 ; -2=1110 ; -7=1001 ; -8=1000
     +8 n'est pas représentable sur 4 bits

2. Indiquer la valeur codée par la suite 1101100101110101 qui représente un entier signé en complément à 2 sur 16 bits.

Correction : C'est un nombre négatif. Complément à 2 = - 0010011010001011 =–9867.

   - Même question avec la suite 0001000011101101.

Correction : C'est un nombre positif. Complément à 2 =+ 0001000011101101 =+4333.

3. Effectuer (**sur 6 Bits**) en **Cà1** puis en **Cà2** les opérations suivantes :

+19+5 ; +20+15 ; -13-12 ; -21-17 ; +19-3 ; +2-11 ; -18-14.

1) En Complément à1

+19	**010011**	**+20**	**010100**	**-12**	**110011**
+5	**000101**	**+15**	**001111**	**-13**	**110010**
= +24	**011000 (correct)**	**= +35**	**100011 (incorrect)** **Débordement (35>31)**	**= -25**	**1 100101** **+ 1** **100110 (Cà1)** **111001 (S/VA)=-25**

-21	101010	-19	101100	+2	000010
-17	101110	+3	000011	-11	110100
= -38	1011000 +1 011001(incorr) Débordement	= -16	101111 (Cà1) 110000 (S/VA)=-16	= -9	110110 (Cà1) 101001 (S/VA)=-9

-18	101101
-14	110001
= -32	1 011110 +1 011111(incorrect) Débordement

2) En Complément à 2

+19	010011	+20	010100	-12	110100
+5	000101	+15	001111	-13	110011
= +24	011000 (correct)	= +35	100011 (incorrect) Débordement (35>31)	= -25	1 100111 Supprimer la retenue 1 100111 (Cà2) 111001 (S/VA)=-25
-21	101011	-19	101101	+2	000010
-17	101111	+3	000011	-11	110101
= -38	1011010 Supprimer la retenue 1 011010(incorr) Débordement (-38<-32)	= -16	110000 (Cà2) 110000 (S/VA)=-16	= -9	110111 (Cà2) 101001 (S/VA)=-9

-18	**101110**
-14	**110010**
= -32	**1100000** **Supprimer la retenue** **1 100000 (Cà2)** **100000 (S/VA)=-32**

Exercice 2

$$\mathbf{11111111010100000000000000000000}$$

1- Valeur entière S+VA

$-(2^{30} + 2^{29} + 2^{28} + 2^{27} + 2^{26} + 2^{25} + 2^{24} + 2^{22} + 2^{20}) = -\mathbf{2135949312}_{(10)}$

2- Valeur entière C.R (cà1)

$$-\mathbf{00000000101011111111111111111111}_{(2)} = -(\mathbf{2^{23}} + \mathbf{2^{21}} + \mathbf{2^{20}} - \mathbf{1})$$
$$= -\mathbf{11534335}_{(10)}$$

3- Valeur Entière C.V (cà2)

$$\mathbf{11111111010100000000000000000000} - \mathbf{1}$$
$$= \mathbf{11111111010011111111111111111111}$$

$x = -00000000101100000000000000000000_{(2)} = -(2^{23} + 2^{21} + 2^{20}) = -11534336_{(10)}$

4- Valeur réelle en virgule flottante

Sachant que $Eb = Er + 127$

$$E_r = E_b - 127 = 254 - 127 = 127$$

$$\underbrace{1}_{S}\underbrace{11111110}_{Eb}\,\underbrace{10100000000000000000000}_{M}$$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{S} \times \mathbf{M} \times \mathbf{2}^{Er}$

$\boldsymbol{S} = -\mathbf{1}$

$\boldsymbol{M} = \mathbf{1.101}_{(2)} = \mathbf{1} + \mathbf{2}^{-1} + \mathbf{2}^{-3} = \mathbf{1.625}_{(10)}$

$\boldsymbol{x} = -\mathbf{1.625} \times \mathbf{2}^{+127}$

Exercice 3

Donner en hexadécimal, la représentation en ANSI / IEEE 754 des nombres suivant

$+64.5_{(10)} = +1000000.1 = +1.0000001 \times 2^6$ => le nombre est **normalisée**

$Eb = 6 + 127 = 133 = 10000101_{(2)}$

partie fractionnaire de la mantisse

0 1 0 0 00101 00000010000000000000000

Eb

Donc, la représentation en hexadécimal est

$42810000_{(16)}$

$+8.375_{(10)} = +1000.011 = +1.000011 \times 2^{3}$ => le nombre est **<u>normalisée</u>**

$Eb = 3 + 127 = 130 = 10000010_{(2)}$

Partie fractionnaire de la mantisse

0 1 0 0 00010 00001100000000000000000

Eb

Donc, la représentation en hexadécimal est

$41060000_{(16)}$

$-2.625_{(10)} \times 2^{-129} = \mathbf{1}0.101 \times \mathbf{2}^{-\mathbf{12}9} = \mathbf{0}.\ 0\mathbf{10101} \times \mathbf{2}^{-\mathbf{12}6}$

=> le nombre est **<u>dénormalisé</u>=>**$Eb = 00000000_{(2)}$

La mantisse

1 0 0 0 00000 01010100000000000000000

Eb

$802A0000_{(16)}$

$+\mathbf{5} \times \mathbf{2}^{-\mathbf{128}} = +\mathbf{101} \times \mathbf{2}^{-\mathbf{128}} = \mathbf{1}.\ \mathbf{01} \times \mathbf{2}^{-\mathbf{126}}$**=> le nombre est <u>normalisé</u>**

$Eb = -126 + 127 = 1 = 00000001_{(2)}$

Partie fractionnaire de la mantisse

0 0 0 0 00001 01000000000000000000000

Eb

$00A00000_{(16)}$

<u>Exercice 4</u>

1- **Question 1**: Le nombre min et max qu'on peut représenter en IEEE simple précision

$\boldsymbol{Nnp_{min}}$ est représenté en $\mathbf{0\ 00000001}\underbrace{000\ldots\ldots0}_{\mathbf{23\ zéros}}$

$\boldsymbol{Nnpmin} = +\mathrm{a}\boldsymbol{min} \times \mathbf{2}^{\mathrm{b}\boldsymbol{min}}$

$\mathrm{b}_{\mathrm{min}} = \mathrm{Er} = \boldsymbol{Eb} - \mathbf{127} = -\mathbf{126}$

$\mathrm{a}\boldsymbol{min} = \mathbf{1.\ 000} \ldots \mathbf{0}$

Donc, $\boldsymbol{Nnp_{min}} = \mathbf{2^{-126}}$

- $\boldsymbol{Nnpmax}$est représenté en $\mathbf{0\ 11111110}\ \overbrace{\mathbf{1\ 1\ 1\ \ldots\ldots\ldots\ 1}}^{\boldsymbol{23\ uns}}$

$\boldsymbol{Nnpmax} = +\boldsymbol{amax} \times \mathbf{2}^{\boldsymbol{bmax}}$

$\mathrm{b}\boldsymbol{max} = \boldsymbol{Er} = \boldsymbol{Eb} - \mathbf{127} = \mathbf{254} - \mathbf{127} = \mathbf{127}$

$\boldsymbol{amax} = \mathbf{1.\ 111} \ldots \mathbf{1} = \mathbf{2} - \mathbf{2^{-23}}$

Donc, $\boldsymbol{Nnpmax} = (\mathbf{2} - \mathbf{2^{-23}})^{\mathbf{127}} \approx \mathbf{3.\ 4} \times \mathbf{10^{38}}$

2- Question 2

1)

X = AE800000 = 10101110100000000000000000000000

X **est normalisé**

$M = 1.000 \ldots 0_{(2)} = 1_{(10)}$

$Er = Eb - 127 = 93 - 127 = -34$

$X = -1_{(10)} \times 2^{-34}$

Y = AF600000 = 10101111011000000000000000000000

Y **est normalisé**

$M = 1.\ 11000 \ldots 0_{(2)} = 1.75_{(10)}$

$Er = Eb - 127 = 94 - 127 = -33$

$Y = -1.\ 75_{(10)} \times 2^{-33}$

2) $Z = X - Y = -1_{(2)} \times 2^{-34} + 1.\ 11_{(2)} \times 2^{-33}$

$= -0.1_{(2)} \times 2^{-33} + 1.\ 11_{(2)} \times 2^{-33} = +1.\ 01_{(2)} \times 2^{-33}$

La représentation de $\boldsymbol{Z}$ est

1 01011101 01000000000000000000000