تحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثلية:

بعد الوصول إلى الحل الأمثل لأي برنامج خطي يُعبّر عن نشاطات مشروع ما أو مصنع ما باستخدام طريقة السمبلكس، وكانت إدارة المشروع أو المصنع ترغب في إحداث بعض التغييرات على البرنامج الخطي كأن يكون على سبيل المثال زيادة في الموارد المتاحة مثل رأس المال، العمل والمواد الأولية، فإن مثل هذه التغييرات تؤدي إلى تغير البرنامج الخطي، مما يؤدي إلى ضرورة إعادة حله مرة أخرى. وبالنظر لكثرة التغيرات التي يُمكن أن تحدث، فإن عملية إعادة حل البرنامج الخطي يُمكن أن تكون مجهدة وتتطلب حسابات كثيرة، مما يؤدي إلى ضياع الوقت وإحتمال الوقوع في أخطاء حسابية. ولتجاوز مثل هذه المشكلة يتم إستخدام ما يُسمى بـ «تحليل الحساسية» أو «تحليل ما بعد الأمثلية»، والذي يدرس أثر التغيرات التي يُمكن أن تحدث في البرنامج الخطي، وذلك بالاعتماد على آخر جدول عند حله بطريقة السمبلكس (جدول الحل الأساسي الأمثل) دون اللجوء إلى إعادة حله مجدداً.

وتتمثل التغيرات التي يُمكن أن تحدث في البرنامج الخطي فيما يلي:

- تغير قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف؛
- تغير قيم الطرف الأيمن من القيود؛
- إضافة متغيرة جديدة؛
- التغير في معاملات المتغيرات في القيود؛
- إضافة قيد جديد.

وسيتم تناول تحليل حساسية التغير في العناصر الثلاثة الأولى فقط.

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي وجدول الحل الأمثل له كما يلي:

$$Z_{min}=3x_1+10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1+6x_2 \geq 10 \\ 2x_1+7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^a	x_5^c	x_6^a	b_i
10	x_2	2/7	1	0	0	-1/7	1/7	2
0	x_3^c	-23/7	0	1	-1	-6/7	6/7	2
	C_j	3	10	0	M	0	M	
	Zj	20/7	10	0	0	-10/7	10/7	
	Δ_j	1/7	0	0	M	10/7	M-10/7	Z=20

1- تغير قيم معاملات دالة الهدف:

1-1- تغير قيم معاملات المتغيرات خارج الأساس:

المتغيرة X_1 هي متغيرة خارج الأساس. فإذا إفترضنا أن قيمة معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً؟
نكتب قيمة المعامل الجديدة للمتغيرة X_1 في دالة الهدف في السطر C_j ونعيد حساب قيم Δ_j في السطر الأخير، ونتحصل على الجدول التالي:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^a	X_5^c	X_6^a	b_i
10	X_2	2/7	1	0	0	-1/7	1/7	2
0	X_3^c	-23/7	0	1	-1	-6/7	6/7	2
	C_j	$3+\Delta$	10	0	M	0	M	
	Zj	20/7	10	0	0	-10/7	10/7	
	Δ_j	$1/7+\Delta$	0	0	M	10/7	M-10/7	Z=20

يبقى الجدول السابق حلاً أمثلاً إذا بقيت جميع قيم السطر الأخير Δj أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التدنية، إذا:

$$\frac{1}{7}+\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -1/7$$ أي أن $$\Delta \in \left[-\frac{1}{7},+\infty\right[$$

وبالتالي:

$$C_1 \geq 3-\frac{1}{7} \Rightarrow C_1 \geq \frac{20}{7}$$ أي أن $$C_1 \in \left[\frac{20}{7},+\infty\right[$$

أي أنه كلما كانت قيمة المعامل C1 أكبر من أو تساوي 20/7 فإن نقطة الحل الأمثل تبقى دون تغير. أما إذا أُعطيت للمعامل C1 قيمة أصغر من 20/7 فإن قيمة Δ_1 ستصبح سالبة وبالتالي سيكون الحل غير أمثل ولا بد من إكمال الحل حتى الوصول إلى نقطة حل مثلى جديدة.

1-2- تغير قيم معاملات متغيرات الأساس:

المتغيرة X_2 هي متغيرة داخل الأساس. فإذا إفترضنا أن معامل هذه المتغيرة في دالة الهدف تغير بمقدار Δ، فما هي القيم التي يجب أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً؟

نكتب قيمة المعامل الجديدة للمتغيرة X_2 في دالة الهدف في السطر C_j وأيضاً في العمود C_i، ونعيد حساب قيم السطر Δ_j، ونتحصل على الجدول التالي:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^a	X_5^c	X_6^a	b_i
$10+\Delta$	X_2	2/7	1	0	0	-1/7	1/7	2
0	X_3^c	-23/7	0	1	-1	-6/7	6/7	2
	C_j	3	$10+\Delta$	0	M	0	M	
	Zj	$20/7+2/7\Delta$	$10+\Delta$	0	0	$-10/7-1/7\Delta$	$10/7+1/7\Delta$	
	Δ_j	$1/7-2/7\Delta$	0	0	M	$10/7+1/7\Delta$	$M-10/7-1/7\Delta$	$Z=20+2\Delta$

يبقى الجدول السابق حلاً أمثلاً إذا بقيت جميع قيم السطر Δ_j أكبر من أو تساوي الصفر ما دامت دالة الهدف في حالة التدنية، إذا:

$$\frac{1}{7}-\frac{2}{7}\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\leq\frac{1}{2} \quad \text{أي أن } \Delta\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{10}{7}+\frac{1}{7}\Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq -10 \quad \text{أي أن } \Delta\in[-10\ +\infty[$$

$$\Rightarrow -10\leq\Delta\leq\frac{1}{2} \quad \text{أي أن: } \Delta\in\left[-10,\frac{1}{2}\right]$$

وبالتالي:

$$10-10\leq C_2\leq 10+\frac{1}{2}\Rightarrow 0\leq C_2\leq\frac{21}{2} \quad \text{أي أن} \quad C_2\in\left[0,\frac{21}{2}\right]$$

$$\Delta \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$-\infty$ .... -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 $\frac{1}{2}$ 1 .... $+\infty$

$-\infty$ .... -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 .... $+\infty$

$$\Delta \in [-10, +\infty[$$

نلاحظ أن القيمة Δ M-10/7-1/7 ستبقى موجبة لأن M قيمة موجبة كبيرة جدا.

وكلما كانت قيمة C_2 أكبر من أو تساوي الصفر وأقل من أو تساوي 21/2، فإن جدول الحل الأمثل يبقى أمثلاً. أما إذا أُعطيت للمعامل C2 قيمة خارج المجال المسموح به فهذا يعني أن جدول الحل الأخير سيصبح غير أمثل، وبالتالي يجب متابعة الحل إنطلاقاً من هذا الجدول.

وينبغي الإشارة إلى أنه حتى مع بقاء جدول الحل الأمثل أمثلاً في حالة كان التغير في قيمة معامل متغيرة أساسية في دالة الهدف ضمن المجال المسموح به، إلا أن قيمة دالة الهدف ستتغير، حيث تعتمد القيمة الجديدة على قيمة Δ.

2- تغير قيم الطرف الأيمن من القيد:

لو إفترضنا أن قيمة من قيم bi تغيرت بمقدار Δ، ما هي القيم التي يُمكن أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً وممكناً.

لنفرض أن قيمة b_1 تغيرت كما هو مُوضح في البرنامج الخطي التالي:

$$Z_{min}=3x_1+10x_2$$

$$s/c\begin{cases} 5x_1+6x_2\geq 10+\Delta \\ 2x_1+7x_2\geq 14 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

ما هي القيم التي يُمكن أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً وممكناً.

بما أن التغير في الطرف الأيمن حاصل في القيد الأول، فإننا هنا نستعين بمعاملات عمود المتغيرة الإصطناعية X_4^a

أو بسالب معاملات عمود المتغيرة المكملة X_3^c

ويكون جدول الحل الأساسي الأخير (الأمثل) كما يلي:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^a	X_5^c	X_6^a	b_i
10	X_2	**2/7**	**1**	**0**	**0**	**-1/7**	**1/7**	**2 +0 Δ**
0	X_3^c	**-23/7**	**0**	**1**	**-1**	**-6/7**	**6/7**	**2 - Δ**
	C_j	**3**	**10**	**0**	**M**	**0**	**M**	
	Zj	**20/7**	**10**	**0**	**0**	**-10/7**	**10/7**	
	Δ_j	**1/7**	**0**	**0**	**M**	**10/7**	**M-10/7**	**Z=20 +0 Δ**

لكي يبقى الحل أمثلاً وممكناً يجب أن تكون:

$2-\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 2$ أي أن $\Delta \in]-\infty; 2]$

وبالتالي:

$b_1 \leq 10+2 \Rightarrow b_1 \leq 12$ أي أن $b_1 \in]-\infty; 12]$

وينبغي الإشارة إلى أن أخذ Δ لقيم داخل المجال المسموح به (ماعدا الصفر الذي يعني عدم تغير الطرف الأيمن من القيد، وبالتالي بقاء نفس نقطة الحل الأمثل) لن يؤثر على متغيرات الأساس، وأيضاً لن يؤثر على قيمة X_2،لأن قيمة المعامل الموجود في عمود المتغيرة المكملة x_3^c أو عمود المتغيرة الإصطناعية x_4^a في صف متغيرة الأساس X_2 تساوي الصفر. ولن تتأثر أيضاً قيمة دالة الهدف لأن سعر ظل القيد رقم 1 يساوي الصفر. وستتأثر فقط قيمة x_3^c.

وأخذ Δ لقيم خارج المجال المسموح به سيُبقي على جدول الحل الأخير صفة جدول حل أمثل، لكنه سيصبح حل غير ممكن لأن قيمة متغيرة الأساس x_3^c ستصبح سالبة، وهنا يُمكن تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة **Dual Simplex Method**.

لنفترض الآن أن قيمة b_2 تغيرت كما هو مُوضح في البرنامج الخطي التالي:

$$Z_{min}=3x_1+10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1+6x_2 \geq 10 \\ 2x_1+7x_2 \geq 14+\Delta \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ما هي القيم التي يُمكن أن تأخذها Δ حتى يبقى الحل أمثلاً وممكناً.

بما أن التغير في الطرف الأيمن حاصل في القيد الثاني، فإننا هنا نستعين بمعاملات عمود المتغيرة الإصطناعية X_6^a أو بسالب معاملات عمود المتغيرة المكملة X_5^c

يكون جدول الحل الأساسي الأخير (الأمثل) كما يلي:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^a	x_5^c	x_6^a	b_i
10	x_2	2/7	1	0	0	-1/7	1/7	2 +1/7 Δ
0	x_3^c	-23/7	0	1	-1	-6/7	6/7	2 +6/7 Δ
	C_j	3	10	0	M	0	M	
	Zj	20/7	10	0	0	-10/7	10/7	
	Δ_j	1/7	0	0	M	10/7	M-10/7	Z=20 +10/7 Δ

لكي يبقى الحل أمثلاً وممكناً يجب أن تكون:

$$2+\frac{1}{7}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -14 \quad \text{أي أن} \quad \Delta \in [-14+\infty[$$

$$2+\frac{6}{7}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{7}{3} \quad \text{أي أن} \quad \Delta \in \left[-\frac{7}{3}+\infty\right[$$

$$\Rightarrow \Delta \geq -\frac{7}{3} \quad \text{أي أن} \quad \Delta \in \left[-\frac{7}{3},+\infty\right[$$

وبالتالي:

$$b_2 \geq -\frac{7}{3}+14 \Rightarrow b_2 \geq \frac{35}{3} \quad \text{أي أن} \quad b_2 \in \left[\frac{35}{3},+\infty\right[$$

ويُلاحظ أن أخذ Δ لقيم داخل المجال المسموح به (ماعدا الصفر الذي يعني عدم تغير الطرف الأيمن من القيد، وبالتالي بقاء نفس نقطة الحل الأمثل) لن يؤثر على متغيرات الأساس، لكن قيم هذه الأخيرة تتغير. وتتغير أيضاً قيمة دالة الهدف (لأن سعر ظل القيد رقم 2 يختلف عن الصفر).

وأخذ Δ لقيم خارج المجال المسموح به سيُبقي على جدول الحل الأخير صفة جدول حل أمثل، لكنه سيصبح حل غير ممكن، وهنا يُمكن تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة **Dual Simplex Method**.

ملاحظة:

عند دراسة أثر تغير الطرف الأيمن من القيد على الحل الأمثل، يتم إستخدام أعمدة المتغيرات المكملة أو الإصطناعية كما يلي:

- في حالة قيد إشارته أقل من أو تساوي يتم إستخدام قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة؛
- في حالة قيد إشارته أكبر من أو تساوي يتم إستخدام قيم معاملات عمود المتغيرة المكملة بعد ضربها في المعامل1-، أو قيم عمود المتغيرة الإصطناعية؛
- في حالة قيد إشارته تساوي يتم إستخدام قيم معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية؛

أسعار الظل:

يُعرف سعر الظل Yi للقيد i بأنه قيمة التغير في دالة الهدف الناتج عن تغير قيمة الطرف الأيمن bi من القيد بوحدة واحدة، بشرط أن يكون تغير قيمة الطرف الأيمن ضمن مجال التغير المحدد عند تحليل حساسية قيم الطرف الأيمن من القيد.

والجدول التالي يُجمل كيفية إيجاد قيمة سعر الظل حسب إشارة القيد وحالة دالة الهدف، كما يبين العلاقة بين الطرف الأيمن من القيد وقيمة دالة الهدف:

إشارة القيد	حالة دالة الهدف	سعر الظل	العلاقة بين الطرف الأيمن من القيد ودالة الهدف
أقل من أو تساوي	التعظيم	نأخذ قيمة المتغيرة المكملة في السطر الأخير Δ_j بالقيمة المطلقة ونتحصل على: **سعر ظل ذو قيمة موجبة**	طردية
	التدنية	نأخذ قيمة المتغيرة المكملة في السطر الأخير Δ_j بعد ضربها في 1- ونتحصل على: **سعر ظل ذو قيمة سالبة**	عكسية
أكبر من أو تساوي	التعظيم	نأخذ قيمة المتغيرة المكملة في السطر الأخير Δ_j، أو نطرح قيمة المتغيرة الإصطناعية في السطر Δ_j من M- ونتحصل على: **سعر ظل ذو قيمة سالبة**	عكسية
	التدنية	نأخذ قيمة المتغيرة المكملة في السطر الأخير Δ_j، أو نطرح قيمة المتغيرة الإصطناعية في السطر Δ_j من M ونتحصل على: **سعر ظل ذو قيمة موجبة**	طردية
تساوي	التعظيم	نطرح قيمة المتغيرة الإصطناعية في السطر الأخير Δ_j من M– في حالة التعظيم، أو من M في حالة التقليل ونتحصل على: **سعر ظل ذو قيمة موجبة أو قيمة سالبة**	طردية في حالة إشارة موجبة لسعر الظل وعكسية في حالة إشارة سالبة لسعر الظل.
	التدنية		

من جدول الحل الأمثل المذكور سابقاً، قيم أسعار الظل للقيدين هي كما يلي:

$$Y_1 = 0$$

$$Y_2 = \frac{10}{7}$$

3- إضافة متغيرة جديدة:

لو فرضنا أنه تم إضافة متغيرة جديدة إلى البرنامج الخطي، فإنه يتم تحليل حساسية هذه المتغيرة كما يلي:

- نستخرج مصفوفة جزئية من جدول الحل الأمثل وهي مصفوفة تتكون من أعمدة المتغيرات المكملة والإصطناعية كما يلي:
  - في حالة قيد إشارته أقل من تساوي: معاملات عمود المتغيرة المكملة؛
  - في حالة قيد إشارته أكبر من تساوي: معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية أو سالب معاملات عمود المتغيرة المكملة؛
  - في حالة قيد إشارته تساوي: معاملات عمود المتغيرة الإصطناعية.
- نضرب المصفوفة الجزئية في معاملات المتغيرة الجديدة في القيود؛
- نجمع حاصل ضرب القيم المتحصل عليها في الخطوة السابقة في قيم العمود Ci في جدول الحل الأمثل.

- نقارن القيمة المُتحصل عليها في الخطوة السابقة مع معامل المتغيرة الجديدة في دالة الهدف:
  - في حالة التعظيم: إذا كان معامل المتغيرة الجديدة في دالة الهدف أصغر من أو يساوي القيمة المتحصل عليها، فإن الحل الأمثل لا يتغير، وفي حالة كان أكبر فإن الحل يتغير.
  - في حالة التدنية: إذا كان معامل المتغيرة الجديدة في دالة الهدف أكبر من أو يساوي القيمة المتحصل عليها، فإن الحل الأمثل لا يتغير، وفي حالة كان أصغر فإن الحل يتغير.

إذا أضفنا متغيرة ثالثة إلى البرنامج الخطي كما يلي:

$$Z_{min}=3x_1+10x_2+8x_3$$

$$s/c\begin{cases}5x_1+6x_2+4x_3\geq 10\\2x_1+7x_2+3x_3\geq 14\\x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0\end{cases}$$

هل تتغير نقطة الحل الأمثل؟

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{7}\\-1 & \frac{6}{7}\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}\\-\frac{10}{7}\end{bmatrix}$$

نجمع حاصل ضرب القيم المتحصل عليها مع القيم المقابلة في العمود Ci كما يلي:

$$\left(\frac{3}{7}X10\right)+\left[\left(-\frac{10}{7}\right)X0\right]=\frac{30}{7}$$

نُلاحظ أن $\frac{30}{7}<8$ وبالتالي فإن إضافة المتغيرة الثالثة سوف لن يؤثر على نقطة الحل الأمثل.