Chapitre IV : Les Systèmes du 2eme ordre

IV.1 Fonction de transfert

L'équation différentielle la plus générale de second ordre est :

$$b_2\frac{d^2s(t)}{dt}+b_1\frac{ds(t)}{dt}+b_0s(t)=a_2\frac{d^2e(t)}{dt}+a_1\frac{de(t)}{dt}+a_0e(t)$$

Dans ce paragraphe, nous n'étudierons que les systèmes tels que les dérivées de l'entrée n'interviennent pas (a2 = a1 = 0). La fonction de transfert de ces systèmes peut se mettre sous la forme :

$$b_2\frac{d^2s(t)}{dt}+b_1\frac{ds(t)}{dt}+b_0s(t)=a_0e(t)$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle précédente (toutes les conditions initiales sont nulles), permet d'obtenir sa fonction de transfert :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{a_0}{b_2p^2+b_1p+b_0}=\frac{\frac{a_0}{b_2}}{p^2+\frac{b_1}{b_2}p+\frac{b_0}{b_2}}$$

$$H(p)=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0p+\omega_0^2}$$

La fonction de transfert (la transmittance) canonique est fournie par :

$$H(p)=\frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}p+1}=\frac{N(p)}{D(p)}$$

Les coefficients caractérisant la fonction de transfert canonique :

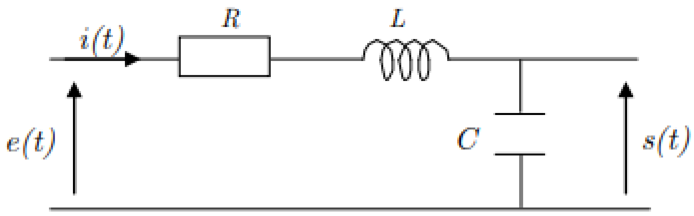
$K=\frac{a_0}{b_2}$: Gain statique ;

$\omega_0=\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}$: Pulsation propre ;

$\xi=\frac{b_1}{2\sqrt{b_0b_2}}$: Coefficient d'amortissement.

<u>Exemple 1 :</u> Circuit RLC série

On considère le système électronique suivant :



En appliquant la loi des mailles :

$e=Ri+L\frac{di}{dt}+u$ Comme $i=C\frac{du}{dt}$, on a :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u=e$$

Ce circuit est décrit par une équation différentielle de deuxième ordre de type

$$\frac{d^2s(t)}{dt}+\frac{R}{L}\frac{ds(t)}{dt}+\frac{1}{LC}s(t)=\frac{e(t)}{LC}$$

Elle peut être mise sous sa forme canonique (les conditions initiales sont nulles)

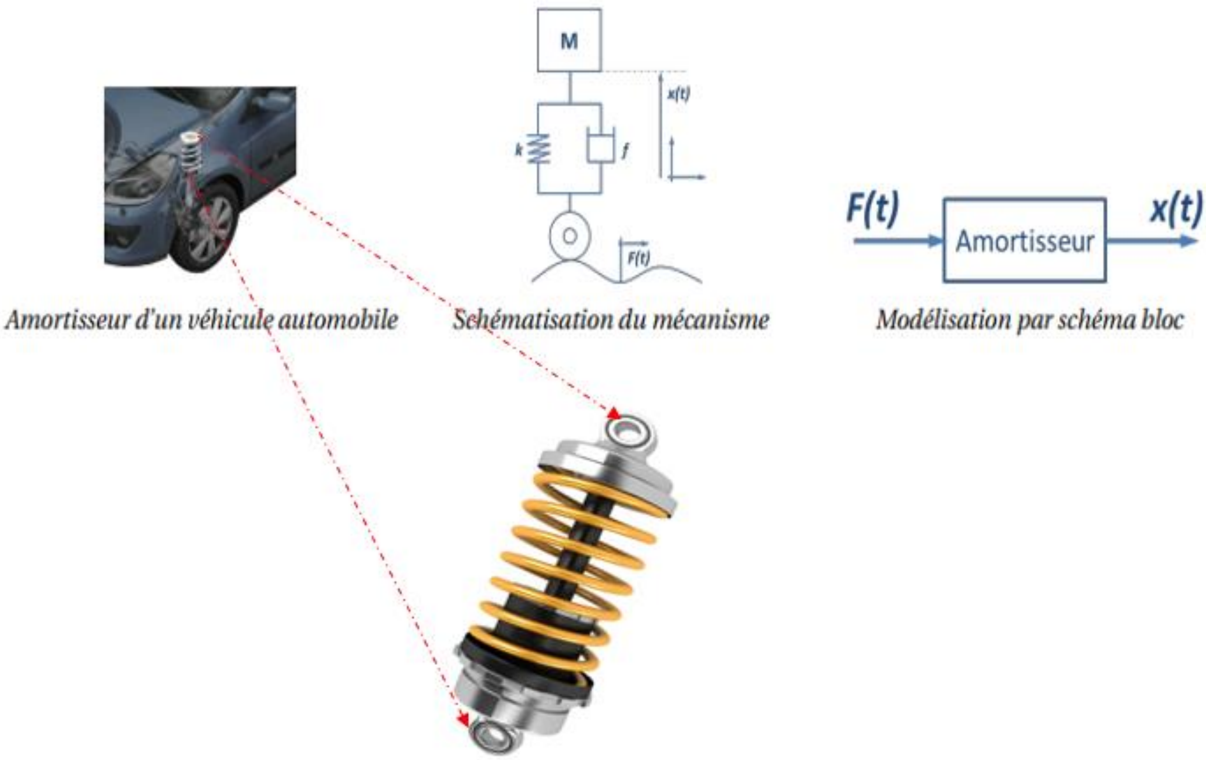
$$\frac{d^2s(t)}{dt}+2\xi\omega_0\frac{ds(t)}{dt}+{\omega_0}^2s(t)={\omega_0}^2e(t)$$

Par la comparaison on trouve :

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

<u>Exemple 2 :</u> Système dynamique de suspension et amortisseur d'un véhicule

Dans tout système réel, une partie de l'énergie totale est dissipée, le plus souvent en chaleur, ce qui crée une force d'amortissement. En mécanique, celle-ci dépend de la vitesse du corps. Dans de nombreux cas, on peut supposer que le système est linéaire, l'amortissement étant alors proportionnel à la vitesse. En électricité, l'amortissement désigne l'effet résistif d'un circuit RLC.



Les deux organes suspension et amortisseur sont souvent confondus car ils sont très souvent (train avant) encastrés l'un dans l'autre. Ici le ressort en jaune c'est la suspension et l'amortisseur en métal c'est tout le reste. Le système de suspension et amortisseur d'un véhicule équivalant au système Masse-ressort-Amortisseur, avec une masse *m* fixée, une constante de raideur *k*, et un coefficient d'amortissement *f* :

$$F_r = -kx$$

$$F_a = -f\frac{dx}{dt}$$

La masse est un corps libre. On suppose le repère inertiel, donc le premier vecteur est parallèle au ressort et à l'amortisseur. D'après la conservation de la quantité de mouvement :

$$F_r + F_a = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx - f\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

C'est une équation différentielle ordinaire du second ordre. Elle est linéaire, homogène et à coefficients constants :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Afin de simplifier l'équation, nous définissons deux paramètres :

- La pulsation propre du système : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$;
- Le taux d'amortissement : $\xi = \frac{f}{2\sqrt{km}}$.

IV.2 Solutions de l'équation du système du 2eme ordre

Pour trouver les pôles de $S(p)$ calculons le discriminant associé à $D(p)$:

$$\Delta = \frac{2\xi}{\omega_0} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$$

IV.2.1 Cas du régime apériodique (ξ >1)

Pour ce régime l'équation caractéristique admet deux racines réelles négatives :

$$p_1 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$p_2 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

IV.2.2 Cas du régime pseudopériodique (ξ < 1)

Pour ce régime l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$p_1 = -\left(\xi - j\sqrt{1 - \xi^2}\right)\omega_0$$

$$p_2 = -\left(\xi + j\sqrt{1 - \xi^2}\right)\omega_0$$

IV.2.3 Cas du régime critique (ξ =1) :

Pour ce régime critique, l'équation caractéristique admet une racine double

$$p_1 = p_2 = \omega_0$$

IV.3 Réponse indicielle du système 2eme ordre

La réponse indicielle va donc dépendre de ξ

Dans ce cas, $S(p) = \frac{1}{p}H(p)$

IV.3.1 Cas du régime apériodique (ξ >1)

Dans ce cas, $D(p)$ possède 2 racines réelles notées $p1$ et $p2$:

$$p_1 = \frac{-2\xi\omega_0 - \sqrt{\Delta}}{2} = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$p_2 = \frac{-2\xi\omega_0 + \sqrt{\Delta}}{2} = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

On a $p1 < p2 < 0$.

En notant $\tau_1 = \frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = \frac{1}{p_2}$, la fonction de transfert $H(p)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

En conséquence,

$$S(p) = \frac{1}{p}H(p) = \frac{1}{p}\frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

En calculant alors la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$s(t) = K(\frac{1}{\tau_1 - \tau_2}(\tau_1 \exp\left(-t\frac{t}{\tau_1}\right) - \tau_2 \exp\left(-t\frac{t}{\tau_2}\right)))$$

En $t = 0$, la courbe admet une **tangente horizontale** ;

La courbe ne dépasse pas son asymptote horizontale ($s(t)$ est monotone) ;

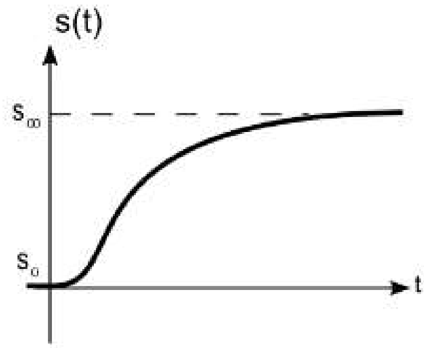
Il n'y a pas de formule pour déterminer le temps de réponse à 5% ;

Nous pouvons remarquer cependant que le système ressemble à un système du premier ordre lorsqu'on s'éloigne de $t = 0$;

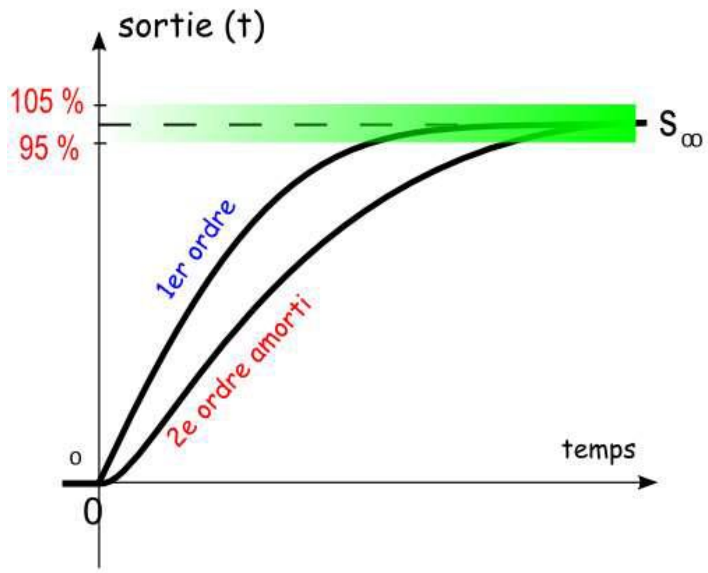
Le temps de réponse à 5% peut donc être approché par la valeur $t_{5\%} = 3 * 2\xi\omega_0$

IV.3.1.1 Déterminer les grandeurs caractéristiques du système pour ξ >1

1. **On détermine le premier dépassement :** Si ξ **>1** Amortissement fort Il n'y a pas de dépassement ;



2. **On détermine le temps de repose à** $t_{5\%}$: Pour une réponse indicielle sans dépassement : **t5%** correspond au temps mis pour atteindre 95% de la valeur finale.



IV.3.2 Cas du régime critique (ξ =1)

Dans ce cas $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, on parle d'amortissement critique, l'existence d'un pôle double modifie le décomposition en éléments simples et on obtient :

$$s(t) = K(1 - (1 + \frac{1}{\tau_0}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right))$$

La réponse est plus rapide que si ξ **>1**($t_{5\%} = 5\omega_0$), mais l'allure de la courbe est très similaire.

IV.3.3 Cas du régime pseudopériodique (ξ < 1)

Dans ce cas on parle de système sous amorti. Dans ce cas $H(p)$ admet deux pôles complexes conjugués :

$$p_1 = -\left(\xi - j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_0$$

$$p_2 = -\left(\xi + j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_0$$

La décomposition de $S(p)$ en éléments simples et le calcul de la transformée de Laplace inverse nous donne :

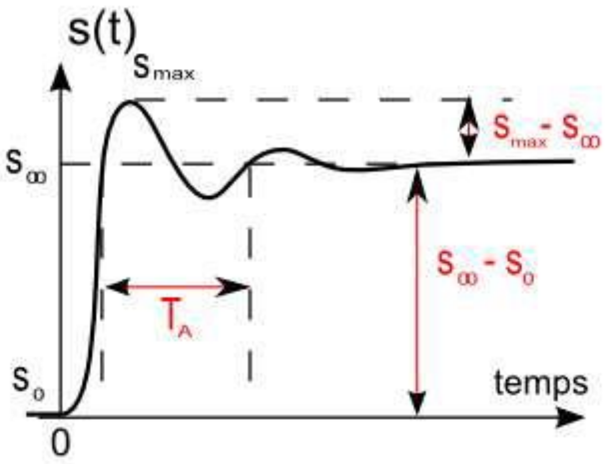
$$s(t) = K\left[1 - \frac{\exp(-\xi\omega_0 t)}{\sqrt{1-\xi^2}} sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t + arccos\xi\right]$$

La courbe admet toujours une tangente horizontale à $t = 0$.

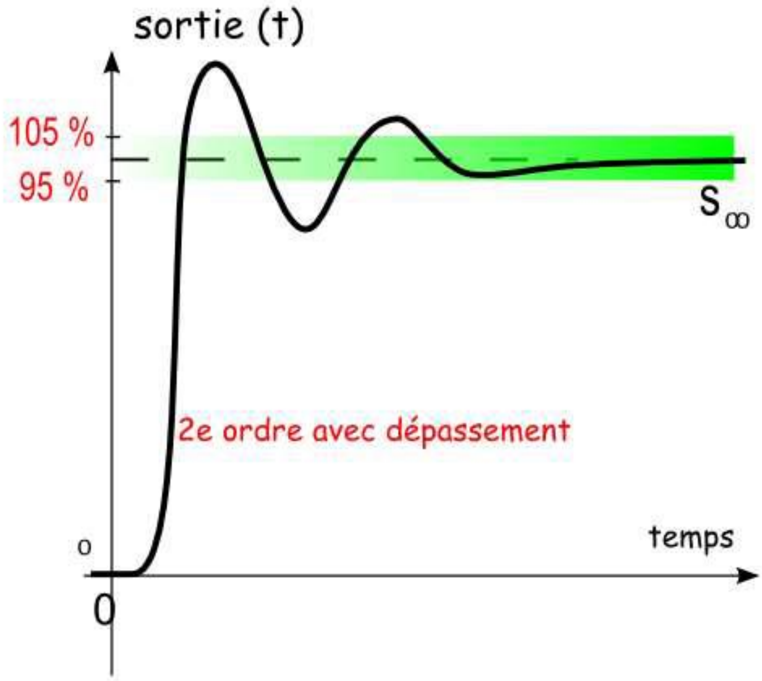
On observe l'apparition d'oscillations autour de la valeur finale (réponse pseudopériodique), d'autant plus amorties que ξ est élevé.

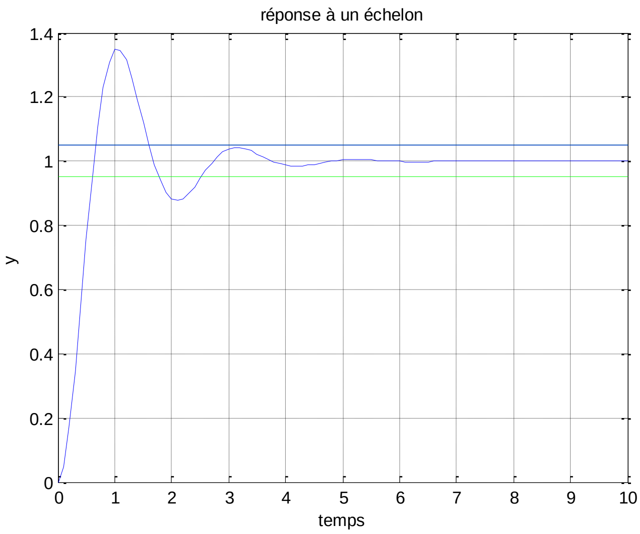
IV.3.3.1 Déterminer les grandeurs caractéristiques du système pour $\xi < 1$

1. **On détermine le premier dépassement** : $D_1 = \frac{S_{max}-S_\infty}{S_\infty - S_0}$



2. **On détermine le temps de repose à $t_{5\%}$** : Pour une réponse indicielle avec dépassement, $t_{5\%}$ correspond au temps mis rester dans l'intervalle [95% ; 105%] de la valeur finale.





Tp: pseudo-periode des oscillations

tm : temps de montée

D : dépassement maximale

tp : temps de pic

tr : temps d'établissement

KE_0 : valeur finale