Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2022-2023$
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique **Algèbre** 3

Série no 3 : Applications de diagonalisation

Exercice 1. *Soit A la matrice* $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.*
2. *En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.*

Exercice 2. *Soit la matrice* $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 2+\alpha & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. *Calculer le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(\lambda)$.*
2. *Déterminer les valeurs propres de A_α.*
3. *Déterminer les valeurs de α pour que A_α soit diagonalisable.*
4. *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 4x(t) - z(t), \\ z'(t) = 4x(t) + y(t) - 2z(t). \end{cases}$$

avec $x(0) = 0, y(0) = -5$ *et* $z(0) = -1$.

Exercice 3. *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t), \\ y'(t) = x(t), \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t). \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 1)$.

Exercice 4. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

1. *Diagonaliser A.*
2. *Calculer A^n en fonction de n.*

3. *On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

On pose $X_n = (u_n, v_n, w_n)^T$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.