ANALYSE NUMÉRIQUE

Prof. HAMRI Nasr-eddine
Département de Mathématiques
Université Abdelhafid Boussouf - Mila

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre

1

NOTIONS D'ERREURS

1 PRÉLIMINAIRES

L'outil fondamental en analyse numérique (qui nous fournit des méthodes de calcul pour l'étude et la solution approchée de problè mes mathématiques dont la résolution est généralement impossible ou impraticable), demeure la formule de Taylor. Ces solutions approchées sont le plus souvent calculées sur ordinateur au moyen d'algorithmes convenables. Dans ce qui suit nous rappelons quelques théorèmes dont la connaissance est impérative pour une meilleure compréhension de la suite.

Théorème 1 (de la valeur intermédiaire). Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$, on définit $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors pour tout y dans $[m,M]$, il existe au moins un point x dans $[a,b]$ pour lequel

$$f(x) = y.$$

Théorème 2 (des accroissements finis). Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$, différentiable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point c dans $[a,b]$ pour lequel

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Théorème 3 (de la moyenne). Soit $w(x)$ une fonction non négative définie et intégrable sur un intervalle $[a,b]$, et soit $f(x)$ une fonction continue sur $]a,b[$. Alors

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = f(\xi)\int_a^b w(x)dx$$

pour $\xi \in [a,b]$.

Théorème 4 (de Taylor). Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$, $(n+1)$ fois dérivable sur $[a,b]$ pour $n \geq 0$, et soit $x, x_0 \in [a,b]$. Alors

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x). \tag{1.1}$$

Où

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) \\ &\quad + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \qquad (1.2) \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

pour $\xi \in]x_0, x[$

En utilisant la formule de Taylor on obtient par exemple les formules suivantes :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi_x} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + \qquad (1.4) \\ &\quad + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos(\xi_x) \end{aligned}$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 0 \tag{1.5}$$

De cette dernière formule nous pouvons déduire :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad |x| < 1 \tag{1.6}$$

On peut calculer les séries de Taylor de n'importe quelle fonction suffisamment dérivable avec autant de termes que l'on veut. Cependant à cause de la complexité de la différentiation de plusieurs fonctions, il est souvent préférable d'obtenir indirectement leur polynôme d'approximation de Taylor $p_n(x)$ ou leur séries de Taylor, en utilisant l'un des développement limités connus. Les trois exemples qui suivent montrent que les erreurs sont plus simples que lorsque l'on utilise la formule de l'erreur (1.2).

1.1 Exemples

1. $f(x) = e^{-x^2}$, En remplaçant x par $-x^2$ dans (1.3), on obtient :

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \ldots + (-1)^n \frac{x^2 n}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!} e^{\xi_x}$$

   avec $\xi_x \in [-x^2, 0]$.
2. $f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, En posant $x = -u^2$ dans le développement de $\frac{1}{1-x}$ on a :

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + u^4 - \ldots + (-1)^n u^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{u^{2n+2}}{1+u^2}$$

   en intégrant sur $[0, x]$ on aboutit à :

$$\frac{1}{\tan(x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{u^{2n+2}}{1+u^2} du$$

   En appliquant le théorème de la moyenne, on obtient :

$$\int_0^x \frac{u^{2n+2}}{1+u^2} du = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{1}{1+\xi_x^2}$$

   avec $\xi_x \in [0, x]$.
3. $f(x) = \int_0^1 \sin(xt) dt$, Utilisant le développement de $\sin x$, et intégrant, on écrit :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^{2j-1}}{2j!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 t^{2n+1} \cos(\xi_{xt}) dt$$

   avec $\xi_{xt} \in [0, xt]$. L'intégrale dont le reste est bornée par $\frac{1}{2n+2}$, mais on peut aussi la mettre sous une forme simplifiée, et en appliquant le théorème de la moyenne on a :

$$\int_0^1 \sin(xt) dt = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^{2j-1}}{2j!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\xi_x)$$

   avec $\xi_x \in [0, x]$.

2 Erreurs absolues et Erreurs relatives

Un nombre approché x est légèrement différent du nombre exact X, et qui dans les calculs remplace X.

- Si $x < X$, x est dit valeur par *défaut* .
- Si $x > X$, x est dit valeur par *excès* .

On note généralement $x \approx X$.

2.1 Exemple

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

Définition 5. On appelle erreur Δx d'un nombre approché, la valeur :

$$\Delta x = X - x,$$

C'est-à-dire

$$X = x + \Delta x$$

Définition 6. On appelle erreur absolue Δ d'un nombre x la valeur

$$\Delta = \mid X - x \mid \tag{2.1}$$

Remarque 7.
1. Si X est connu, l'erreur absolue est déterminée par (2.1).
2. Si X est inconnu, l'erreur absolue Δ est impossible à déterminer. Dans ce cas on introduit la limite supérieure de l'erreur absolue.

Définition 8. On appelle borne supérieure de l'erreur absolue tout nombre supérieur ou égal à l'erreur absolue de ce nombre. C'est-à-dire :

$$\Delta = \mid X - x \mid \leq \Delta_x$$

si Δ_x désigne la borne supérieure, donc

$$x - \Delta_x \leq X \leq x + \Delta_x$$

On note

$$X = x \pm \Delta_x.$$

2.2 Exemples

Trouver la borne supérieure d'erreur absolue de $\pi = 3,14$.

$$3,14 \leq \pi \leq 3,15$$

Donc $\mid x - \pi \mid \leq 0,01$, on peut poser $\Delta_x = 0,01$, comme $3,140 \leq \pi \leq 3,142$, une meilleure estimation de la borne d'erreur absolue est $\Delta = 0,002$.

Définition 9. On appelle erreur relative notée δ d'un nombre x, le rapport suivant :

$$\delta = \frac{\Delta}{\mid X \mid}, \quad (X \neq 0)$$

C'est-à-dire

$$\Delta = \mid X \mid \delta.$$

Définition 10. La borne supérieure de l'erreur relative δ_x est un nombre supérieur ou égal à l'erreur relative de ce nombre. C'est-à-dire :

$$\delta \leq \delta_x$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta}{\mid X \mid} \leq \delta_x,$$

donc

$$\Delta \leq \mid X \mid \delta_x$$

On peut aussi utiliser

$$\Delta_x = \mid x \mid \delta_x$$

car $X \approx x$.

Remarque 11. Si l'on connait une borne d'erreur relative δ_x on a :

$$X = x(1 \pm \delta_x)$$

C'est-à-dire

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{x - \Delta_x}.$$

De même on obtient :

$$\Delta_x = \frac{x\delta_x}{1 - \delta_x}.$$

Exemple

En cherchant la constante de gaz, on a obtenu $R = 29,25$, l'erreur relative étant $1^0/_{00}$ trouver un encadrement de R. On a $\delta_x = 0,001$, donc $\Delta_x = R\delta_x = 0,03$, c'est-à-dire :

$$29,22 \leq R \leq 29,28.$$

3 PRINCIPALES SOURCES D'ERREURS

Les erreurs commises dans les problèmes peuvent ê tre des :

Erreurs inhérentes au problème : Erreurs dûes à la position même du problème. Le modèle théorique est trés rarement fidèle au modèle réel. Lors de l'étude d'un phénomène de la nature on est souvent contraint d'admettre certaines conditions.

Erreurs de la méthode : Il arrive qu'il soit difficile ou mê me impossible de résoudre un problème enoncé en termes exacts. On le remplace par un problème approché.

Erreurs de troncature : Associées aux processus infinis. Les fonctions données dans les formules le sont sous forme de suites infinies ou de séries, on est donc obligé de mettre fin à un certain terme de la suite. Par exemple, l'approximation d'une somme infinie par une somme finie, l'approximation de la limite d'une suite par un terme de "grand indice" ou encore l'approximation d'une inté grale par une somme finie.

Erreurs initiales : Dûes à la présence dans les formules de paramètres dont les valeurs sont approchées.

Erreurs d'arrondi : Dûes au système de numérisation.

Erreurs propagées : Les erreurs des données de départ se repercutent sur le résultat des calculs.

4 PRECISION, CHIFFRES SIGNIFICATIFS

4.1 Chiffres significatifs

Définition 12. On appelle chiffre significatif d'un nombre tous les chiffres de son écriture à partir du premier chiffre différent de zéro à gauche.

Exemple Les chifres significatifs des nombres $x = 0,0\underline{3045}$ et $x = 0,0\underline{3045000}$ sont ceux soulignés. Ils sont 4 chiffres dans le premier cas et 7 dans le deuxième.

Définition 13. Un chiffre significatif est dit *exact* si l'erreur absolue sur le nombre ne dépasse pas l'unité de l'ordre correspondant.

Exemple $x = 0,0\underline{3045}$, $\Delta(x) = 0,000003$; $x = 0,0\underline{3045}00$, $\Delta(x) = 0,0000007$; les chiffres soulignés sont exacts.

Définition 14. Si tous les chiffres significatifs sont *exacts*, on dit que le nombre est écrit avec tous les chiffres exacts.

Exemple $x = 0,03045$, $\Delta(x) = 0,000003$, x, est écrit avec 4 chiffres exacts. On parle souvent de *décimales exactes*. Dans le dernier exemple le nombre x est écrit avec 5 décimales exactes.

4.1.1 Règle pour arrondir les nombres

Soit x un nombre approché sous forme décimale. Pour l'arrondir jusqu'à n chiffres significatifs, c'est-à-dire le remplacer par un nombre x_1 [1] avec n chiffres significatifs, on rejette tous les chiffres à droite du $n^{ième}$ chiffre significatif ou s'il faut conserver les rangs, on les remplace par des zéros. Dans ces cas :

— Si le premier des chiffres rejetés est inférieur à 5, les chiffres restent inchangés.
— Si le premier des chiffres rejetés est supérieur à 5, on ajoute une unité au dernier chiffre restant.
— Si le premier des chiffres rejetés est égal à 5, et si parmi les autres chiffres rejetés il y en a des non nuls, le dernier chiffre restant est augmenté de l'unité.
• Mais si le premier des chiffres rejetés est égal à 5 alors que les autres chiffres rejetés sont nuls, le dernier chiffre conservé reste inchangé s'il est pair ou on lui ajoute une unité s'il est impair.

Exemple En arrondissant le nombre

$$x = 3,045166382535$$

jusqu'à 5 ; 4 et 3 chiffres significatifs, on obtient les nombres approchés $3,0452$, $3,045$ et $3,05$

5 Cumulation des erreurs d'arrondi

5.1 Erreurs d'arrondi sur une somme

Soient X, Y des nombres réels supposés représentés sans erreur avec N chiffres significatifs :

$$\begin{array}{ll} X = 0,a_1a_2\dots a_N.b^p, & b^{-1+p} \leq X < b^p \\ Y = 0,a'_1a'_2\dots a'_N.b^q, & b^{-1+q} \leq Y < b^q \end{array}$$

Et $\Delta(X+Y)$ l'erreur d'arrondi commise sur le calcul de $X+Y$. Supposons $p \geq q$.

— Si $X+Y < b^p$, le calcul de $X+Y$ s'accompagne de la perte des $p-q$ derniers chiffres de Y correspondants aux puissances $b^{-k+q} < b^{-N+p}$; donc $\Delta(X+Y) \leq b^{-N+p}$, alors que $X+Y \geq X \geq b^{-1+p}$.
— Si $X+Y \geq b^p$, la décimale correspondant à la puissance b^{-N+p} est elle aussi perdue, d'où $\Delta(X+Y) \leq b^{1-N+p}$.

Dans les deux cas :

$$\Delta(X+Y) \leq \varepsilon(\mid X \mid + \mid Y \mid),$$

Où $\varepsilon = b^{1-N}$ est la précision relative. Ceci est vrai quel que soit le signe de X et de Y. En général, les réels X, Y ne sont connus que par des valeurs approchées x, y avec des erreurs respectives $\Delta_x = \mid X - x \mid, \Delta_y = \mid Y - y \mid$. A ces erreurs s'ajoutent l'erreur d'arrondi :

$$\Delta(x+y) \leq \varepsilon(\mid x \mid + \mid y \mid + \Delta_x + \Delta_y).$$

Les erreurs Δ_x, Δ_y sont elles mêmes le plus souvent d'ordre ε par rapport à $\mid x \mid$ et $\mid y \mid$, de sorte que l'on pourra *"négliger"* les termes $\varepsilon\Delta_x$ et $\varepsilon\Delta_y$. On aura :

$$\Delta(x+y) \leq \Delta_x + \Delta_y + \varepsilon(\mid x \mid + \mid y \mid).$$

Remarque 15. Pour calculer une somme de réels positifs $\sum_{k=1}^{n} u_k$, on calcule les sommes partielles $s_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ de proche en proche par les formules de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_0 & = & 0 \\ s_k & = & s_{k-1} + u_k, \quad k \geq 1 \end{array} \right.$$

1. le nombre x_1 est choisi de façon à minimiser l'erreur d'arrondi $\mid x_1 - x \mid$.

Si les u_k sont connus exactement, on aura sur s_k des erreurs Δ_{s_k}telles que $\Delta_{s_1} = 0$ et

$$\Delta_{s_k} \leq \Delta_{s_{k-1}} + \varepsilon(s_{k-1} + u_k) = \Delta_{s_{k-1}} + \varepsilon s_k.$$

L'erreur globale sur s_n vérifie

$$\Delta_{s_n} \leq \varepsilon(s_2 + s_3 + \ldots + s_n).$$

5.2 Erreurs d'arrondi sur un produit

Le produit de deux mantisses de N chiffres donne une mantisse de $2N$ ou $2N-1$ chiffres dont les N ou $N-1$ derniers vont être perdus. Dans le calcul d'un produit XY il y aura donc une erreur d'arrondi

$$\Delta(xy) \leq \varepsilon \mid XY \mid, \quad \text{où} \quad \varepsilon = b^{1-N}.$$

Si X et Y ne sont connus que par des valeurs approchées x, y et si $\Delta_x = \mid X - x \mid$, $\Delta_y = \mid Y - y \mid$, on a une erreur initiale :

$$\mid XY - xy \mid = \mid X(y-Y) + (x-X)y \mid \leq \mid X \mid \Delta_y + \Delta_x \mid y \mid$$

A cette erreur s'ajoute une erreur d'arrondi :

$$\Delta(xy) \leq \varepsilon \mid xy \mid \leq \varepsilon(\mid x \mid + \Delta_x)(\mid y \mid + \Delta_y).$$

Ce qui donne la formule approximative :

$$\Delta(xy) \leq \mid x \mid \Delta_y + \Delta_x) \mid y \mid + \varepsilon \mid xy \mid .$$

Cette dernière formule nous permet d'obtenir par récurrence :

$$\Delta(x_1 x_2 \ldots x_k) \leq (k-1)\varepsilon \mid x_1 x_2 \ldots x_{k-1}.x_k \mid .$$

Remarque 16. La majoration de l'erreur d'un produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

6 Représentation approchée des nombres réels

L'objet de cette section est de mettre en évidence les principales difficultés liées à la pratique des calculs numériques sur ordinateur. La capacité mémoire d'un ordinateur est par construction finie. Si X est un nombre réel, il est donc nécessaire de représenter X sous forme approchée. La notation la plus utilisée est la repré sentation avec *virgule flottante* :

$$X \simeq \pm m.b^p$$

Où b désigne la base de numération, m la mantisse, et p l'exposant. Les calculs internes sont généralement effectués en base $b = 2$, même si les résultats affichés sont finalement traduits en base 10. La mantisse m est un nombre écrit avec virgule fixe et possèdant un nombre maximum N de chiffres significatifs (impos é par la mémoire de l'ordinateur) : suivant les machines, m s'é crira

$$m = 0, a_1 a_2 \cdots a_N = \sum_{k=1}^{N} a_k b^{-k}, \qquad b^{-1} \leq m < 1.$$

Ceci entraine que la précision dans l'approximation d'un nombre réel est toujours une précision relative :

$$\frac{\Delta_x}{X} = \frac{\Delta_m}{m} \leq \frac{b^{-N}}{b^{-1}} = b^{1-N}.$$

On note $\varepsilon = b^{1-N}$ cette précision relative. **Exemple.** La même écriture peut représenter des nombres différents dans des bases différentes : $123,45$ en base 10 repr ésente le nombre $x = 1.10^2 + 2.10 + 3 + 4.10^{-1} + 5.10^{-2}$, en base 6 il représente le nombre $y = 1.6^2 + 2.6 + 3 + 4.6^{-1} + 5.6^{-2}$. D'autre part, le même nombre peut avoir un nombre fini de chiffres dans une base, et un nombre infini dans une autre base : $x = 1/3$ donne $x_3 = 0,1$ en base 3 et $x_{10} = 0,3$ en base 10.

6.1 Nombres en virgule flottante

De nombreuses manières ont été proposées pour repré senter les nombres par un ordinateur mais la plus utilisée aujourd'hui est donc la représentation dite en *"virgule flottante"* , et en base 2 (On utilise aussi la base 8 et la base 16 (numérotation hexadécimale à seize chiffres, de 0 à 9, auxquels on rajoute les lettres A,B,C,D,E et F)). La manière courante d'écrire les nombres aujourd'hui est la notation de position en base dix. On se donne donc dix symboles $0;1;2 = 1+1;3 = 2+1;...;9 = 8+1$. La représentation d'un nombre entier est simplement une suite finie de tels symboles. Par exemple 27821 n'est que le symbole 2 suivit du symbole 7,. . . Pour mettre en évidence l'aspect suite de symboles , nous écrirons :

2	7	8	2	1

Pour savoir à quel nombre correspond cette suite de symboles, on les interprète selon leur position. Ici la base est $b = 10 = 9+1$. Cela signifie que chaque fois qu'on se déplace d'un chiffre vers la gauche, la puissance de dix augmente de 1 :

$2[10^4]$	$7[10^3]$	$8[10^2]$	$2[10^1]$	$1[10^0]$

Ainsi, le nombre représenté est $2b^4 + 7b^3 + 8b^2 + 2b^1 + 1b^0 = 2.10^4 + 7.10^3 + 8.10^2 + 2.10^1 + 1.10^0$. Ceci c'était pour les nombres entiers. Qu'en est-il des écritures avec virgule ? Par exemple, que

représente $0,2$? Simplement, c'est $2/10 = 2.10^{-1}$. Et $1,74$ représente $1.10^0 + 7.10^{-1} + 4.10^{-2}$. De manière générale,

$\pm$	a_n	...	a_1	a_0	$,a_{-1}$	a_{-2}	...

représente le nombre $\pm(a_n 10^n + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \cdots)$, c'est-à -dire

$$\pm \sum_{i=-\infty}^{n} a_i 10^i.$$

Notons que la suite des décimales a_{-1}, a_{-2},...peut être finie ou infinie et que dans ce dernier cas la série converge. Représenter les nombres en base deux se fait exactement de la même manière

qu'en base dix excepté qu'on remplace dix par deux ! Ainsi, on se donne deux symboles 0 et 1. A une suite de tels symboles

$\pm$	a_n	...	a_1	a_0	$,a_{-1}$	a_{-2}	...

$a_i \in \{0,1\}$,

on fait correspondre le nombre

$$\pm \sum_{i=-\infty}^{n} a_i 2^i = \pm(a_n 2^n + \cdots + a_1 2 + a_0 + a_{-1} 2^{-1} + \cdots$$

Nous noterons ce nombre $(\pm a_n ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} ...)_2$. On a donc $(110)_2 = 2^2 + 2^1 = 5$ et $(1,11)_2 = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} = 1,75$.

6.2 Non-associativité des opérations arithmétiques.

Supposons par exemple que les réels soient calculés avec $N = 3$ chiffres significatifs et arrondis à la décimale la plus proche. Soient

$$x = 8,22 = 0,822.10, \qquad y = 0,00317 = 0,317.10^{-2}, \qquad z = 0,00432 = 0,432.10^{-2}.$$

On veut calculer la somme $x+y+z$. $(x+y)+z$ donne :

$$x+y = 8,22317 \simeq 0,822.10$$

$$(x+y)+z \simeq 8,22432 \simeq 0,822.10$$

$x+(y+z)$ donne :

$$y+z = 0,00749 \simeq 0,749.10^{-2}$$

$$x+(y+z) = 8,22749 \simeq 0,823.10$$

L'addition est donc non associative par suite des erreurs d'arrondi.

Remarque 17. En générale, dans une sommation de réels, l'erreur a tendance à être minimisée lorsqu'on somme en premier les termes ayant la plus petite valeur absolue.

6.3 Phénomènes de compensation.

Lorsqu'on tente d'effectuer des soustractions de valeurs très voisines, on peut avoir des pertes importantes de précision. **Exemple.** On veut résoudre l'équation $x^2 - 1634x + 2 = 0$ en effectuant les calculs avec $N = 10$ chiffres significatifs. On obtient

$$\Delta' = 667487, \qquad \sqrt{\Delta'} = 816,9987760,$$

$$x_1 = 817 + \sqrt{\Delta'} \simeq 1633,998776,$$

$$x_2 = 817 - \sqrt{\Delta'} \simeq 0,0012240.$$

On voit qu'on a une perte de 5 chiffres significatifs sur x_2. Ici le rem ède est simple : il suffit d'observer que $x_1.x_2 = 2$, d'où

$$x_2 = \frac{2}{x_1} = 1,223991125.10^{-3}.$$

C'est donc l'algorithme numérique utilisé qui doit être modifié.

7 SERIE D'EXERCICES

Exercice 18. Trouver une borne de l'erreur absolue du nombre $x = 3.14$ qui remplace $\pi(\pi = 3.1415926...)$ dans les deux cas suivants :

1. $3.14 < \pi < 3.142$.
2. $3.14 < \pi < 3.15$.

Exercice 19. Supposons que $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ approchent respectivement $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ et que dans chaque cas la borne supérieure de l'erreur absolue est ε. Montrer que la borne supérieure de l'erreur de la somme des $x_i (i = 1, 2, ...n)$ est égale à $n\varepsilon$.

Exercice 20. Donner les bornes des erreurs relatives de $a = 1.414$ et $b = 1.41$ qui approchent $\sqrt{2} = 1.414214.....$

Exercice 21. En recherchant la constante des gaz de l'air on a obtenu $R \simeq 29.25$. La borne de l'erreur relative de cette valeur étant $1^0/_{00}$, trouver les limites entre lesquelles est comprise R.