Chapitre 2: Paramètres de graphes

I. Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier un ensemble de paramètres qui nous permettent de résoudre un certain nombre de problèmes.

Définitions :

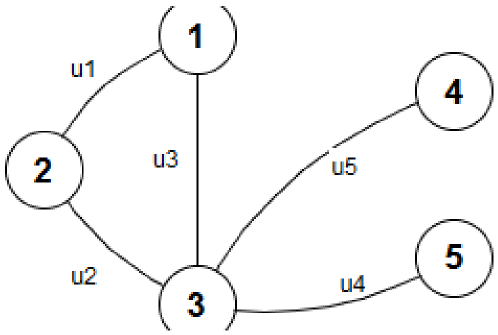
- On appelle ***clique*** un sous-graphe complet de G.
- On appelle ***graphe fini*** un graphe dont le nombre de sommets est fini ($|X|<\infty$).
- On appelle un sous-ensemble A ***absorbant*** si tous sommet *x* n'appartient pas à A possède au moins un successeur dans A.

II. Stabilité

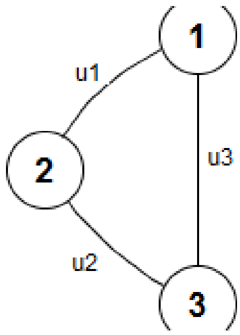
Un sous-ensemble $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$ est un *ensemble stable* (ou un stable) s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux : $\forall\ (x_i, x_j) \in S \Rightarrow (x_i, x_j) \notin U$.

Nombre de Stabilité : noté α(G) : c'est le cardinal maximal d'un sous-ensemble stable de G. (Le cardinal du plus grand stable)

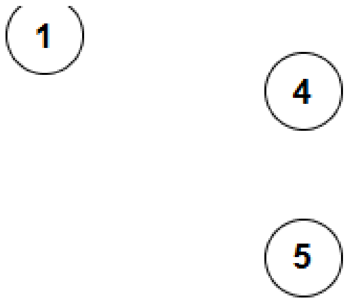
Exemple :



G = (X, U)



une clique



un stable

III. Noyau

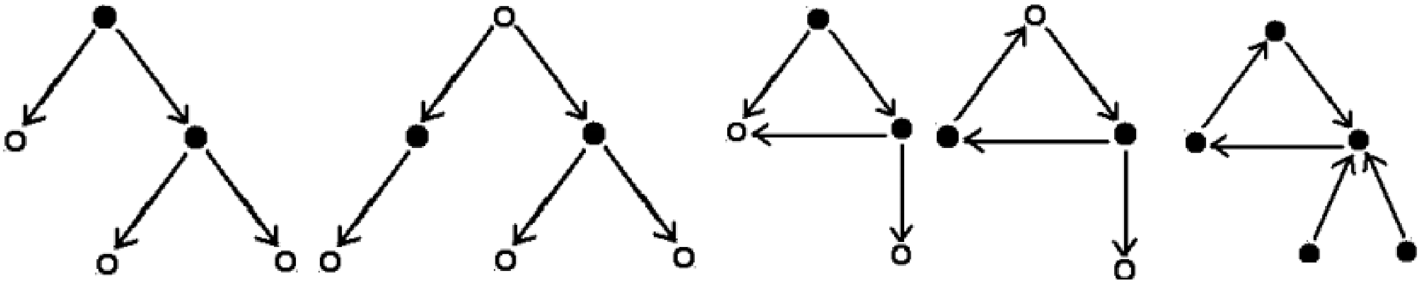
Un sous-ensemble N de sommets est appelé ***noyau*** du graphe s'il est à la fois *stable* et *absorbant*.

Le noyau d'un graphe :

- N'admet pas de boucle,
- Il est l'ensemble stable avec le maximum d'éléments → donc, les sommets de **N** n'ont aucun arc les joignant deux à deux.

- Il est l'ensemble absorbant avec le maximum d'éléments → donc, chaque sommet qui n'est pas dans **N** a un successeur (au moins) dans **N**.

Exemple :

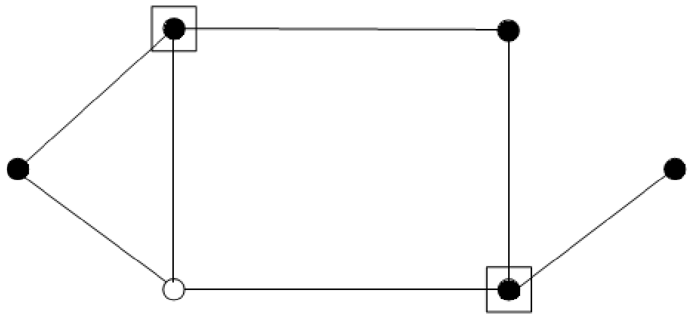


❖ Un graphe orienté peut n'avoir aucun noyau, ou bien un seul, ou bien plusieurs.

IV. Coloration des sommets d'un graphe

Définition : La coloration des sommets d'un graphe consiste en une affectation de couleurs à tous les sommets du graphe de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.

Exemple : coloration en 3 couleurs



IV.1. K-coloriage

Un coloriage du graphe avec ***K*** couleur sera appelé un ***K-coloriage***.

IV.2. Nombre chromatique

Le <u>*nombre chromatique*</u> d'un graphe est le nombre minimum de couleur nécessaire à son coloriage.
On note d'habitude **γ (G)** le nombre chromatique d'un graphe **G**.

Remarque :

- Si plusieurs sommets d'un graphe sont de la même couleur, aucune arête ne les joint. Ils forment donc un sous-graphe stable.
- Colorier un graphe revient donc à le partitionner en sous-graphes stables
- si **G** est un graphe, alors pour tout sous-graphe **H** de **G** on a : **γ (H) ≤ γ (G)**

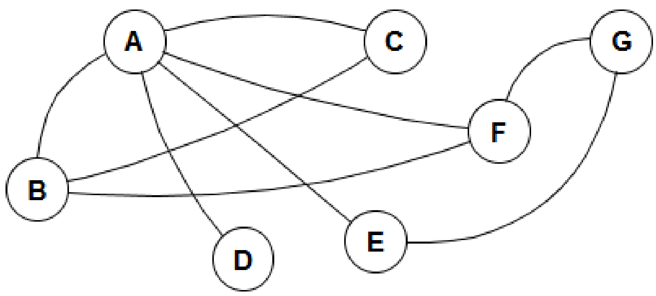
- le nombre chromatique du graphe complet K_n est n
- soit C_n un cycle de longueur **n** :
  si **n** est pair on alors : $\gamma(C_n)=2$, et si **n** est impair on alors : $\gamma(C_n)=3$
- Soit **D** le degré maximal des sommets du graphe **G**. Alors : $\gamma(G) \leq 1 + D$

IV.3. Algorithme 3

```
Algorithme 3 : Welsh-Powell pour colorier un graphe
Entrées : G=(X ; U) un graphe non orienté,
Sortie : un graphe coloré
Variables intermédiaires :
L, V : deux listes de sommets, s : un sommet.
Début
    L = liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leur degré
    couleur courante= 0

    Tant que   L ≠ Ø   faire
         incrémenter la couleur courante
         Colorier s le premier sommet de L avec la
         couleur courante
         Eliminer s de L
         V = liste des voisins de s
         Pour tout    x    dans    L    faire
           SI    x   ∉   V   alors
             Colorier x avec la couleur courante
             ajouter les voisins de x à V
           finSi
         Fin pour
         éliminer les sommets coloriés de L
    Fin tant que
Fin
```

Exemple :



Chapitre 2: Paramètres de graphes

1. On range les nœuds du plus haut degré au plus petit : L = {A, B, F, C, E, G, D}

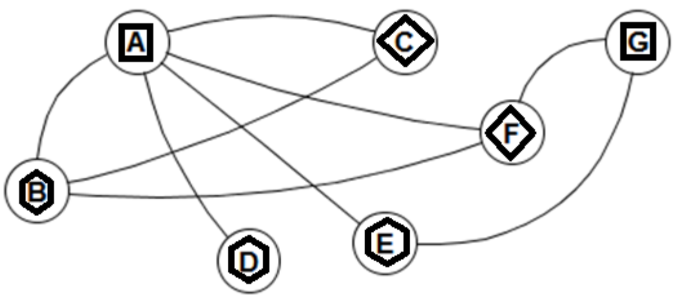
couleur	
bleu	1
noir	2
…	…

Sommets	***A***	***B***	***F***	***C***	***E***	***G***	***D***
Degrés	*5*	*3*	*3*	*2*	*2*	*2*	*1*

2. Prendre la première couleur (par incrémentation) :
   Couleur courante ← 1
   On attribue la couleur courante au premier sommet (ici, le nœud **A**)
   L ← L – A donc, **L = {B, F, C, E, G, D}**
3. **V** : liste de voisin de **A**, donc, **V = {B, C, D, E, F}**
   Pour tout *x* dans **L** faire SI **x** $\notin$ **V** alors
   C'est-à-dire On colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet **A** et qui ne sont pas adjacents entre eux = **{G}**
1. On réitère ce procédé avec une autre couleur pour le premier sommet non colorié de la liste : ici, le sommet **B** :
   L = {B, F, C, E, D}
   Couleur courante ← 2
   On attribue la couleur courante pour le premier sommet (ici, le sommet **B**)
   L ← L – B donc, **L = {F, C, E, D}**

couleur	Réf	Résultats
bleu	1	A,G
noir	2	B,D,E
…	3	F,C

2. **V** : liste de voisin de **B**, donc, **V = {F, C}**
   Pour tout *x* dans **L** faire *SI* ***x*** $\notin$ ***V*** alors
   C'est-à-dire On colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet **B** et qui ne sont pas adjacents entre eux = **{D, E}**
1. On recommence jusqu'à l'épuisement des sommets.
   …



On obtient un ***3-coloriage*** et donc on obtient $\boldsymbol{\gamma(G)}$ **=3.**

Remarque

- Le nombre de couleurs utilisés par cet algorithme n'est pas forcément le nombre chromatique du graphe.