République algérienne démocratique et populaire

Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Analyse I

Année 2022/2023
Domaine: LMD-informatique(1^{er} année)

Série d'exercices N°04

Exercice 1:

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 dans les cas suivants:
   1. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $\quad x_0 = 0$.
   2. $f(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $\quad x_0 = 0$.
   3. $f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2 - a^2}), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$, $\quad |x_0| = a, \quad a \in \mathbb{R}_+$

Exercice 2:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f'(x)$.

Exercice 3:

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes:
   1. $y_1(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$.
   2. $y_2(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 - e^x}$.
   3. $y_3(x) = e^{\cos \sqrt{x}}$.
2. Calcules les dérivées $n - ieme$ des fonctions suivantes:
   1. $y_1(x) = \ln(1 + x)$.
   2. $y_2(x) = \frac{1+x}{1-x}$.
   3. $y_3(x) = (x + 1)^3 e^{-x}$.
   4. $y_4(x) = x^2 \sin 3x$.

Exercice 4:

Déterminer les extremums des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \sin x^2$, dans $[0, \pi]$.
2. $g(x) = x^4 - x^3 + 1$, dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5:

1. Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes:

- $f(x) = \sin^2 x$, sur $[0, \pi]$.
- $g(x) = \frac{\sin x}{2x}$, sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montre que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 < x < y :$ $\quad x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$.

Exercice 6:

En utilisant le théorème de l'Hopital, calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x - 1}$.
2. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$.
3. $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$.