# Chapitre III

# MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES

## Introduction

Nous allons indiquer en partant d'un exemple une méthode qu'on peut souvent utiliser pour chercher la solution d une équation aux dérivées partielles vérifiant certaines conditions initiales et certaines conditions frontières.

Supposons qu'on cherche à résoudre l'équation $(E)$ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $0 < x < L$ et $t > 0$ avec des conditions supplémentaires que nous désignerons par :

$$\begin{aligned} u(x, 0^+) &= f(x) \ (I) \ \text{ condition initiale,} \\ & \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \ (F) \text{ conditions frontières} \end{aligned}$$

On peut essayer a résoudre ce problème en cherchant une solution de la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Alors $(E)$ ,$(I)$ et $(F)$ deviennent : $(E)$ $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$

$$(I) : X(x)T(0) = f(x) \forall x \in [0, L]$$

$$(F) : \begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \end{cases}, \forall t > 0$$

On suppose $F$ non identique à zéro, on cherche donc deux fonctions $X$ et $T$ non identiquement nulles : en tout point $(x, y)$ oū $u(x, t)$ est non nulle $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$ ce n' est possible que si $\frac{X''(x)}{X(x)}$ et $\frac{T'(t)}{T(t)}$ sont constantes .

On est aussi conduit au premier problème qui est le suivant :

**Problème :**

Trouver tous les nombres $\lambda$ et toutes les fonctions non identiquement nulles $X_\lambda$ et $T_\lambda$ telles que :

$$\begin{aligned} X''_\lambda(x) &= \lambda X_\lambda(x),\ X_\lambda(0) = 0 = X_\lambda(L) \\ T'_\lambda(t) &= \lambda T_\lambda(t). \end{aligned}$$

Si $X_\lambda$,$T_\lambda$ et $\lambda$ sont solutions du **problème** , $u(x,t) = X_\lambda(x)T_\lambda(t)$ vérifie $(E)$ et $(F)$. De plus $u(x,0) = X_\lambda(x)T_\lambda(0)$ ne peut été solution de $(E)$ vérifiant $(I)$ qui si $f(x)$ est proportionnelle à l'une des fonctions $X_\lambda(x)$. Autrement dit on sait résoudre le problème proposé pour toutes les fonctions $f$ proportionnelles à l'une des fonctions $X_\lambda$

**Répense :**

Comme l'equation $(E)$ est linéaire et comme les conditions frontières $(F)$ sont vérifiées par les fonctions d'un espace vectoriel toute combinaison linéaire de solution de $(E)$ vérifiant $(F)$ est encore solution de $(E)$ vérifiant $(F)$ :

Si $X_1, ...X_n$et $T_1, ...T_n$ sont solutions du **problème**,

$$u(x,t) = X_1(x)T_1(t) + .... + X_n(x)T_n(t)$$

est solution de $(E)$ et vérifie les conditions $(F)$ : or

$$u(x,0) = X_1(x)T_1(0) + .... + X_n(x)T_n(0)$$

Si

$$f(x) = a_1X_1(x) + .... + a_nX_n(x)$$

On peut résoudre le problème initiale.

En choisissant $T_k(0) = a_k$.

**Définition 52** *Soit* $[a,b]$*un intervalle (borne ou non) de* $\mathbb{R}$. *On dit que la fonction* $f$ *est "carré intégrable " si :*

$$\int_a^b |f(x)|^2 < \infty$$

**Théorème 53** *Soit* $E$ *l'espace vectoriel des "classes d'équivalences pour l'égalité presque partout " des fonctions de carré intégrable .*

*Soit* $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)$; $\langle f,g\rangle$ *est un produit scalaire sur* $E$ *qui est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire. On note* $E = L^2(a,b)$ *et* $\|f\|_2 = \left\{\int_a^b |f(x)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ *la norme correspondante*

**Définition 54** *Soit* $E$ *un espace vectoriel de fonction, un opérateur linéaire sur* $E$ *est un application* $A$ *définie sur* $E$ *et telle que :*

**1)** $A(\lambda u) = \lambda A(u), \forall u \in E$ et $\lambda \in IR$ ou $\mathbb{C}$ suivant que $E$ est construit sur $IR$ ou $\mathbb{C}$.

**2)** $A(u+v) = A(u) + A(v)$.

## *3.1 Méthode de séparation des variables*

**Définition 55** *Espace* $L^2_\delta(a,b)$.

*Soit* $E$ *une fonction strictement positive sur* $[a,b]$, *on note* $L^2_\delta(a,b)$ *L'espace vectoriel des fonctions* $f$ *telle que :*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \delta(x) < \infty$$

*La quantité* $\langle f,g\rangle_\delta = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)\delta(x)dx$ *est un produit scalaire sur cet espace qui est complet pour la norme associée et est ainsi un espace de Hilbert sa plus la convergence en moyenne quadratique par rapport à* $\delta$ *est :* $f_n \to f$ *dans* $L^2_\delta(a,b)$ *si :*

$$\|f_n - f\|_\delta^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \delta(x)dx \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

*On note que* $f \in L^2_\delta(a,b)$ *si est seulement si* $f(\delta)^{1/2} \in L^2(a,b)$

**Exemple 56** *1) Soit* $\delta(x) = x^2, \frac{1}{x} \notin L^2(0,1)$ *mais* $\frac{1}{x} \in L^2_\delta(0,1)$

*2)* $\delta(x) = x^2, f_n(x) = \sqrt{n}1_{[0,1/n]}, f_n \in L^2(0,1)\ \forall n \in \mathbb{N}$ *et* $f_n \in L^2_\delta(0,1), \forall n \in \mathbb{N}$.

$\|f_n\|^2 = 1$ *donc* $f_n$ *ne converge pas dans* $L^2(0,1)$ *vers 0 lorsque* $n \to \infty$

$\|f_n\|_\delta{}^2 = \frac{1}{3n^2}$ *donc* $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *dans* $L^2_\delta(0,1)$.

**Définition 57** *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace vectoriel de fonction E. On appelle valeur propre de A un nombre* $\mu$ *tel que* $\exists f \in E$ *et* $f \neq 0$ *vérifiant* $A\mu = \mu f$.

*On dit que f est une fonction propre associée à la valeur propre* $\mu$.

**Exemple 58** *1) Soient* $\varphi$ *et* $\psi$ *deux éléments non nuls de* $L^2(0,1)$ *et* $E = L^2(0,1)$

$$Af(x) = \varphi(x)\int_0^1 \psi(y)f(y)dy,$$

*un opérateur linéaire sur E.*

$\mu$ *est un valeur propre s il existe* $f \neq 0$ *telle que* $\mu f(x) = \varphi(x)\int_0^1 \psi(y)f(y)dy$.

0 *est un valeur propre et tout les fonctions orthogonales avec* $\psi$ *sont des fonctions propres associée à* 0.

*Si* $\mu \neq 0$ *, soit* $f = a\varphi$ *telle que :*

$$\mu a\varphi(x) = \varphi(x)\int_0^1 \psi(y)a\varphi(y)dy.a \neq 0 \text{ car } f \neq 0$$

*donc* $\mu = \int_0^1 \psi(y)\varphi(y)dy$.

## *3.2 Problème de Sturm-Liouville : ( problème régulier)*

**Définition 59** *Soit :* $p, q$ *et* $s$ *trois fonctions continues sur* $[a,b]$ *telle que :*

$p > 0, s > 0$ *et* $p$ *de classe* $C^1$.

*Soit* $(E)$ :

$$\frac{d\left[p(x)\frac{df}{dx}\right]}{dx} + q(x)f(x) + \lambda s(x)f(x) = 0$$

*et* $(F)$ :

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = 0 & |a_0| + \ |a_1| > 0 \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = 0 & |b_0| + \ |b_1| > 0 \end{cases}$$

*La recherche des nombres* $\lambda$ *et des fonctions* $f \neq 0$ *la solution de* $(E)$ *qui vérifiant les conditions* $(F)$ *s'appelle un problème régulier de Strum-Liouville.*

C'est la recherche des valeurs propres $-\lambda$ et des fonctions $f$ d'opérateur $A$ défini par :

$$[Af](x) = \frac{1}{s(x)} \left[ \frac{d\left[p(x)\frac{df}{dx}\right]}{dx} + q(x)f(x) \right],$$

défini sur l'espace vectoriel $E$ ( des fonctions deux fois dérivables) et qui vérifiant les conditions $(F)$.

**Théorème 60** *1) Il existe une famille dénombrable de valeur propre réelles et simples de* $A : |\lambda_0| < |\lambda_1| < ..... < |\lambda_n|$ *et* $\lim\limits_{n \to \infty} |\lambda_n| = +\infty$, *et une fonction propre* $\varphi_n$ *associée à* $\lambda_n$ *vérifie :*

$$\frac{d\left[p(x)\frac{d\varphi_n}{dx}\right]}{dx} + q(x)\varphi_n(x) + \lambda s(x)\varphi_n(x) = 0$$

*2) la suite* $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$, *est une base de* $L^2_s(a,b)$, , $\varphi_n$ *a exactement un* $n$ *zéro sur* $]a,b[$, $\varphi_{n-1}$ *a un zéro entre deux zéros consécutifs de* $\varphi_n$.

*3) Si* $\varphi$ *satisfait les conditions* $(F)$ *est continue et que sa dérivée* $\varphi'$ *est continue par morceaux alors* $\sum_{n=0} \langle \varphi, \varphi_n \rangle_{L^2_s(a,b)} \varphi_n$ *converge non seulement dans* $L^2_s(a,b)$ *mais aussi uniformément et absolument sur* $[a,b]$.

$$\forall x \in [a,b]\, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, \varphi_n \rangle_{L^2_s(a,b)} \varphi_n.$$

### 3.2.1 Expose de la méthode

Soit $L$ un opérateur différentiel linéaire et $Au = 0$ des conditions frontières linéaire, on veut résoudre l'équation $(E)$ avec les conditions frontiẽres $(F)$ et la condition initiale $(I)$ :

$$\begin{aligned}(E) &: \quad Lu = 0,\\ (F) &: \quad Au = 0,\\ (I) &: \quad u(x,0) = f(x).\end{aligned}$$

**Théorème 61 (Méthode pratique)**

1. On cherche d'abord les solutions de $(E)$ vérifiant $(F)$ qui sont de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. Cela conduit à un problème de Sturm-Liouville dont les solutions sont constituées par une suite $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t), n \in \mathbb{N}$ de fonctions vérifiant $(E)$ et $(F)$ . En général $X_n$ est complètement déterminer mais pas $T_n$.

2. Pour réaliser la condition initiale ou utilise le fait que la suite $X_n, n \in \mathbb{N}$ est une base dans un espace $L^2_\delta$ convenable .

   On suppose que $f$ appartient à cet espace. et on l'a développé par rapport à cette base :

   $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X_n(x) T_n(t)$$

   est alors déterminée par la relation $T_n(0) = c_n$ et la solution est

   $$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(x) T_n(t).$$

**Exemple 62** *On considèe l'équation de chaleur défini par :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < h, t > 0.$$

*avec les conditions initial* $u(x,0) = f(x)$, *et les conditions frontiēres* $u(0,t) = u_x(h,t) = 0$.

*On suppose que :*

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

*on trouve :*

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t),$$

*donc*

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

*Comme* $T$ *est une fonction dépend de* $t$ *et* $X$ *est une fonction dépend de* $x$ *on a*

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (*) \text{ (on suppose } \lambda > 0\text{)}$$

*avec* $\lambda$ *est un constante.*

*On a*

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \Rightarrow X(0)\,T(t) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ ou \\ T(t) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

*On pose* $x(0) = 0,$ *on a aussi*

$$\begin{aligned} u_x(h,t) &= 0 \Rightarrow X'(h)\,T(t) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} X'(h) = 0 \\ ou \\ T(t) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

*On pose* $X'(h) = 0$

D'après la relation $(*)$ on trouve un problème de Sturm-Liouville pour $X(x)$ définir par :

$$\begin{cases} X" + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X'(h) = 0. \end{cases}$$

Ses valeurs propres et les fonctions propres sont :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{(2n-1)\pi}{2h}\right)^2 \\ X_n &= \sqrt{\frac{2}{h}} \sin\frac{(2n-1)\pi}{2h} x, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Pour $T\left(t\right)$ on a : $T' = -k\lambda_n T \Rightarrow T_n = c\exp(-k\lambda_n t)$.

Avec les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$, donc

$$T_n = \exp(-k\lambda_n t)$$

On trouve

$$u_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)\exp(-k\lambda_n t)$$

Donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)\exp(-k\lambda_n t)$$

avec

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{h}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\right)x = f(x) \\ a_n &= \sqrt{\frac{2}{h}}\int_0^h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)(x). \end{aligned}$$