Chapitre 4 : Fonctions dérivables :

1) Dérivée :

1.1 Dérivée en un point :

Déf: Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Déf: f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \longrightarrow f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se noté f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple:
La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, En effet :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x+x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0$$

Proposition:

- f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.

Proposition :

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
- si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque :

La réciproque est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il y a bien une limite à droite (1), une limite à gauche (-1) mais elles ne sont pas égales. Ainsi f n'est pas dérivable en $x=0$ il n'y a pas de limite en 0.

2/ Calcul des dérivées :

proposition :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $(f \times g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$; $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$, $f(x) \neq 0$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, si $g(x) \neq 0$.

Preuve :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) g(x_0) - f(x_0) g(x_0) - f(x_0) g(x) + f(x_0) g(x_0)}{(x - x_0)(g(x) \cdot g(x_0))}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Proposition : Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D et E, tel que $f(D) \subset E$.

Soit f est dérivable en $x_0 \in D$ et g est dérivable en $f(x_0) \in f(D)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Proposition : Fonction inverse :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction injective et continue sur I.

- Si f est dérivable au point x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque : $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(x_0)$ et : $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Dérivée à droite et à gauche :

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$,

1) On dit que f est dérivable à droite au point x_0 si :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finit.}$$

cette limite est appelée dérivée à droite au point x_0 et noté $f'_d(x_0)$.

2) On dit que f est dérivable à gauche au point x_0 si :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finit.}$$

cette limite est appelée dérivée à gauche au point x_0 et noté $f'_g(x_0)$.

3) On dit que f est dérivable au point x_0 si f est dérivable à droite et à gauche et : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple :

1) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$. On a :

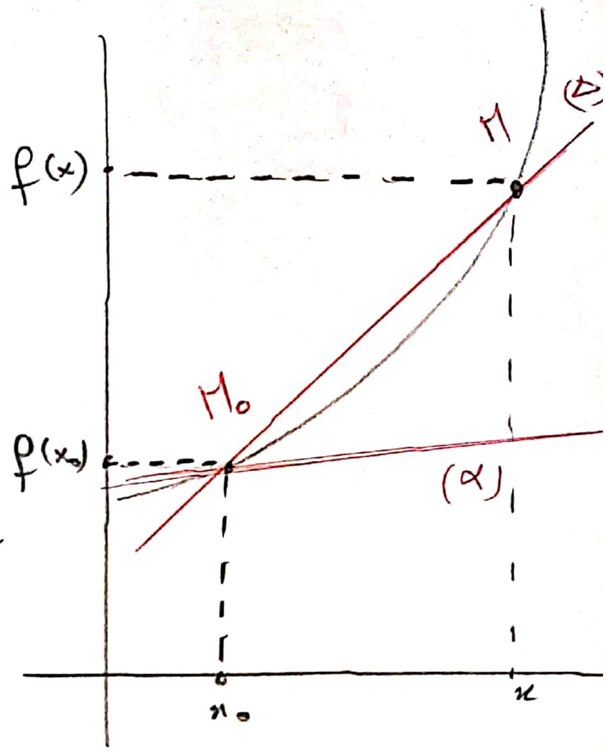
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|x|}{x} = 1.$$

et $$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Tangente :

La droite qui passe par les points distincts $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ à la limite $(x \to x_0)$



on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

alors : si f est dérivable en x_0 alors (C_f) admet une tangente en point $M_0(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$.

une equation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donc : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

proposition : Soient $f : I \to \mathbb{R}$, et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration : soit $l = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme la fonction x est continue en a, on a $\lim\limits_{x \to a}(x-a) = 0$. D'où en utilisant la propriété des limites par rapport au produit :

$$\lim_{x \to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right]$$

$$= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] \lim_{x\to a} (x-a) = l.0 = 0.$$

Donc : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ et f est bien continue en a.

Remarques

La réciproque n'est pas toujours vraie, comme le prouve l'exemple $f(x) = |x|$ en $x=0$.

Dérivée Successives :

soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.

si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.

plus généralement on note :

$f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ ..., $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. si la dérivée n-ieme $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Exemple : 1) soit $f(x) = \sin x$.

calculer $f^{(n)}(x)$.

on a, $f^{(0)}(x) = \sin x$.

$f'(x) = f^{(1)}(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f^{(2)}(x) = -\sin(x) = \sin(x+\pi)$.

$f^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$

$f^{(4)} = \sin x = \sin(x + 2\pi).$

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

. On peut montrer par recurrence que : $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

2) $f(x) = \ln x.$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}.$

$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = \frac{-2\times 3}{x^4}.$

$f^{(5)}(x) = \frac{2\times 3\times 4}{x^5} = \frac{4!}{x^5}$, $f^{(6)}(x) = -\frac{2\times 3\times 4\times 5}{x^6} = -\frac{5!}{x^6}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition:

. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

On dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et f' continue sur I.

- On dit que f est de classe $C^n(I)$. si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

Théorème: Formule de Leibniz:

Soient f et g deux fonctions n-fois dérivable sur I, alors $(f\times g)$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g' + \cdots + C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} + \cdots + C_n^n f^{(0)} g^{(n)}.$$

Exemple : pour $n = 2$,

$$(f \times g)^{(2)} = C_2^0 f'' \cdot g + C_2^1 f' g' + C_2^2 f g''.$$

$$= f'' \cdot g + 2 f' g' + f g''.$$

$n = 6$

$$(f \times g)^{(6)} = C_6^0 f^{(6)} g^{(0)} + C_6^1 f^{(5)} g' + C_6^2 f^{(4)} g'' + C_6^3 f^{(3)} g^{(3)} +$$

$$C_6^4 f'' g^{(4)} + C_6^5 f' g^{(5)} + C_6^6 f^{(0)} g^{(6)}.$$

$$= f^{(6)} g + 6 f^{(5)} g' + 15 f^{(4)} g'' + 20 f^{(3)} g^{(3)} + 15 f^{(2)} g^{(4)} +$$

$$6 f' g^{(5)} + f g^{(6)}.$$

~~pour~~

$$h(x) = (x^3 + 5x + 1) e^x.$$

$$h(x) = (x^3 + 5x + 1) \text{ et } g(x) = e^x.$$

posons $f(x) = (x^3 + 5x + 1)$

$g'(x) = e^x$

$f'(x) = 3x^2 + 5$

$g''(x) = e^x$

$f''(x) = 6x$

$g^{(3)}(x) = e^x$

$f^{(3)}(x) = 6$

$g^{(n)}(x) = e^x.$

$f^{(n)}(x) = 0, \ \forall n \geq 4$

$h(x) = (f \times g)(x).$

$$h^{(n)}(x) = C_n^0 f^{(0)} g^{(n)} + C_n^1 f' g^{(n-1)} + C_n^2 f'' g^{(n-2)} + C_n^3 f^{(3)} g^{(n-3)} + \underbrace{C_n^4 f^{(4)} g^{(n-4)} + \cdots}_{0}$$

$$= (x^3 + 5x + 1) e^x + n (3x^2 + 5) e^x + \frac{n(n-1)}{2} (6x) e^x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 6 \cdot e^x$$

Définition :

1) On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0)=0$.

2) On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp : minimum local) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que :

pour tout $x \in (I \cap J)$: $f(x) \leq f(x_0)$. (resp : $f(x) \geq f(x_0)$).

3) On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0

Théorème : Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum (resp : minimum) local en x_0 alors : $f'(x_0) = 0$.

Démonstration :

On suppose que $f(x_0)$ est un maximum local, c'est-à-dire

$\exists\, J \subset I$ (J ouvert) tel que : $\forall x_0 \in J$, $\forall x \in J$:

$f(x) \leq f(x_0)$. On montre que $f'(x_0) = 0$

Comme f est dérivable en x_0 alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

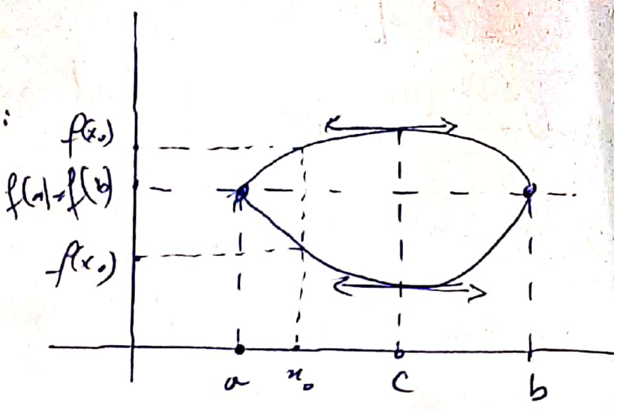
On a, $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0. \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

et $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$

Théorème de Rolle :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :



1) f est continue sur $[a,b]$

2) f est dérivable sur $]a,b[$

3) $f(a) = f(b)$.

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

démonstration :

1) si f est constant sur $[a,b]$ alors : $\forall c \in]a,b[: f'(c) = 0$

2) sinon, $\exists x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$ donc

f admet un extrimum local en c tel que $c \in]a,b[$ et puisque f est dérivable en c donc $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissement finis :

soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

démonstration : soit la fonction g définie par :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

on a : 1) $g(a) = f(a) = g(b)$.

2) $g(x)$ est continue sur $[a,b]$ (somme de 2 fcts conts).

3) $g(x)$ est dérivable sur $]a,b[$.

Alors, d'après le théorème de Rolle : $\exists c \in]a,b[$ tel que : $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$$g'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Fonction croissante et dérivée :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1) $\forall x \in]a,b[: f'(x) > 0 \iff f$ est strictement croissante sur $[a,b]$.

2) $\forall x \in]a,b[: f'(x) < 0 \iff f$ " " décroissante sur $[a,b]$.

3) $\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0 \iff f$ est constante.

Inégalité des accroissement finis :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe un constante M tel que :

$\forall x \in]a,b[: |f'(x)| \leq M$ alors :

$$\forall x, y \in [a,b] : |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

Preuve : $\Rightarrow$ d'après le théorème des accroissement finie sur $[x,y]$

$$\exists c \in]x,y[: f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

$$|f'(c)| \leq M \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$

#

Exemple: Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leq |x|$

On a: $f(x) = \sin x$, $y = 0$,

$f'(x) = \cos x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $|\cos x| \leq 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $|\sin x - \sin 0| \leq 1|x - 0|$

d'après l'inégalité des accroissement finis :

$\forall x \in \mathbb{R}$: $|\sin x - \sin 0| \leq 1|x-0| \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$.

Régle de l'Hopitale:

soit f et g deux fonctions dérivable sur l'intervalle I et soit $x_0 \in I$. On suppose que:

1) $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

2) $\forall x \in I - \{x_0\}$: $g'(x_0) \neq 0$.

si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ alors: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Exemple: calculer: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$ (C.I)

$f(x) = e^x - x - 1$, $g(x) = 1 - \cos x$. , f et g sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x - 1$; $g'(x) = \sin x$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \frac{0}{0}$ (C.I).

On a: $f'(x)$ et $g'(x)$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et:

$f''(x) = e^x$, $g'(x) = \cos x$. donc: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1$

donc: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Fonction convexe :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est convexe si et seulement si pour tout x et y dans I : $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$.
$\forall\, t \in [0, 1]$.

- La fonction f est dite concave si $-f$ est convexe.

Proposition : (convexité et dérivée).
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Si sa dérivée f' est croissante alors f est convexe et $\forall\, x, a \in I$:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$