Solution série 03 :

Exo 1 :

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$,

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0 \right\}$$

$\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

et $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Donc : $D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

2) $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

$$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 \geq 0 \}.$$

$x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$

$D_g =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

3) $h(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{2+x}{2-x} > 0 \text{ et } 2-x \neq 0 \right\}.$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2+x}{2-x}$		$-$		$+$	$\|\|$	$-$	

$D_h =]-2, 2[$

$\boxed{1}$

4/ $k(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \pi}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \pi\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$.

5/ $p(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$D_p = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0 \text{ et } 1+x > 0\}$

$D_p =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

6/ $u(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x . \cos x}{x - \pi} & \text{si } x \neq \pi \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

$D_u = \mathbb{R}$.

EXO 2:

Il faut montrer que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

On a : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- si $x_1 < 0 < x_2$, alors il est évident que $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ (si l'un des deux est nul c'est aussi évident).

- si $0 < x_1 < x_2$ remarquons que :

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

donc: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x_1+1} < \frac{-1}{x_2+1}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{x_1+1} < 1-\frac{1}{x_2+1}$$

d'où $f(x_1) < f(x_2)$.

Alors f est strictement croissante.

- si $x_1 < x_2 < 0$ (même manipulation).

  (prendre $f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$).

Exo 3:

calculer les limites:

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x - \sin x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq x-\sin x \leq X+1$

donc: $x - \sin x \geq x-1$.

$e^{x-\sin x} \geq e^{x-1}$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$.

2/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\tan x)^2}{\cos(2x)-1}$.

on a: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

donc: $\cos(2x) - 1 = 2\cos^2 x - 2 = -2(1-\cos^2 x) = -2\sin^2 x$.

$$\frac{(\tan x)^2}{\cos 2x - 1} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{-2\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x}{2\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{-1}{2\cos^2 x}$$

Lorsque $x \to 0 \Rightarrow \cos^2 x \to 1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{\cos(2x) - 1} = \frac{-1}{2}.$$

3/ $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right]$

On a : $\left[\frac{c}{x}\right] \leq \frac{c}{x} \leq \left[\frac{c}{x}\right] + 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] \leq \frac{\cancel{x}}{b} \cdot \frac{c}{\cancel{x}} \leq \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] + \frac{x}{b}$$

$$0 \leq \frac{c}{b} - \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] \leq \frac{x}{b}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{b} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{c}{b} - \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right] = \frac{c}{b}.$$

4/ $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$.

peut utiliser la règle de l'Hopital ; on pose :

$f(x) = \ln(1+x^2)$ et $g(x) = \sin^2 x$. Alors :

$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $g'(x) = 2\sin x \cos x$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x\,(1+x^2)}.$$

On remarque que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1\right)$

et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(1+x^2)\cos x} = 1$.

donc, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \quad (\text{conjugue}).$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = 1.$$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln x+5}{x^2+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln x\left(1+\frac{5}{x\ln x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$.

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}\left(\frac{1+\cancel{\frac{5}{x\ln x}}}{1+\cancel{\frac{4}{x^2}}}\right) = 0.$$

Exo 4:

1) On a : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ 2b\,e^{x} - x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Remarquons que pour $x>0$ et $x<0$, la fonction f est continue. Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit continue en à droite et à gauche de 0 on a : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2be^{x} - x = 2b = f(0) = 1$

donc $\boxed{b = \frac{1}{2}}$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = a \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax}$

$= a = f(0) = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

2) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 4 \\ (x+a)^2 & \text{si } x < 4 \end{cases}$

. pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier la continuité au point 4.

$\lim_{x \overset{>}{\to} 4} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 4} \sqrt{x} - \frac{1}{x} = \frac{7}{4}$.

$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} (x+a)^2 = (4+a)^2$

pour que f soit continue en 4, il faut que :

$\lim_{x \overset{>}{\to} 4} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} f(x) \Leftrightarrow (4+a)^2 = \frac{7}{4}$.

$\Leftrightarrow |4+a| = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+a = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ -4-a = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{7}}{2} - 4 \\ a = -\frac{\sqrt{7}}{2} - 4. \end{cases}$

Exo 5 :

1) $$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Remarquons que $x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

pour le point 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{x}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 . \text{ et}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x - \frac{x}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Donc $f(x)$ n'est pas continue en 0.

2/ $$g(x) = \begin{cases} 1 + x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } = 0 . \end{cases}$$

la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(1 + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 \quad \text{car : } \left(\lim_{x \to 0} x\cos\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\left(0 < \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| < |x| \right).$$

Donc, puisque $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$, Alors

g n'est pas continue en 0.

Exo 6:

1) $f(x) = \dfrac{x^3+2x+3}{x^3+1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

- f est continue sur D_f, comme quotient de deux polynômes continues.
- Remarquons que (-1) est un racine du numérateur aussi donc sur D_f: $f(x) = \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+3)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)} = \dfrac{x^2-x+3}{x^2-x+1}$

Alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1+3}{x^2-x+1} = \dfrac{3}{1} = 3$ (existe)

donc f ~~est~~ admet un prolongement par continuité au point (-1) donné par:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

2) $g(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- si $n=0$ $g(x) = \dfrac{1-1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ et g admet un prolongement par continuité:

$\tilde{g} = 0$ sur $\mathbb{R}$.

- si $n \geq 1$: on utilise la formule du binôme Newton.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{n}$, ...,

$C_n^{n-1} = n$, $C_n^n = 1$.

donc :

$$g(x) = \frac{1}{x}\left[C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n\right] \quad (x \in D_g).$$

$$= C_n^1 + C_n^2 x + \dots + C_n^n x^{n-1}$$

$\lim_{x \to 0} g(x) = C_n^1 = n$ (existe) donc g admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ donné par :

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ n & \text{si } x = 0 . \end{cases} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{k-1}$$

EX 07 :

1) soit $p > 0$, la période, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$

par une récurrence facile on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+np) = f(x)$$

comme f n'est pas constante, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a + np$ et $y_n = b + np$.

supposons par l'absurde, que f a une limite l en $+\infty$.

comme $x_n \to +\infty$ alors $f(x_n) \to l$. Mais $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$

donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite (y_n)
$y_n \to +\infty$ donc $f(y_n) \to \ell$ et $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$
donc $\ell = f(b)$. comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons
une contradiction.

On considère la fonction $g(x) = f(x) - x$,
sur $[0, +\infty[$, g est continue puisque f l'est
et aussi : $g(0) = f(0) > 0$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - 1\right]$
$= -\infty$.

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et que $a - 1 < 0$.

Donc il existe un réel $b > 0$ (assez grand) tq $g(b) < 0$
(et même $g(x) < 0$ si $x \geq b$). sur l'intervalle $[0, b]$

on a g continue et $g(0) > 0$, $g(b) < 0$, alors
d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists\, x_0 \in [0, b]$
tq : $g(x_0) = 0$ donc : $f(x_0) = x_0$.