République algérienne démocratique et populaire

Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Analyse I

Année 2022/2023
Domaine: LMD-informatique(1^{er} année)

Série d'exercices N°03

Exercice 1:

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes:
   1. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.
   2. $g(x) = \sqrt{x^2+x-2}$.
   3. $h(x) = \ln(\frac{2+x}{2-x})$.
   4. $k(x) = \frac{\sin x - \cos x}{x-\pi}$.
   5. $p(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
   6. $\phi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x . \cos x}{x-\pi} & si\ x \neq \pi \\ 1 & sinon \end{cases}$

Exercice 2:

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par: $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 3:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)^2}{\cos(2x)-1}$.
3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{b}\left[\frac{c}{x}\right]$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x+5}{x^2+4}$.

Exercice 4:

1. Détérminer les valeurs a et b pour que les fonctions f soient continues sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ 2be^x - x, & x<0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x}, & x \geq 4 \\ (x+a)^2, & x<4 \end{cases}$$

Exercice 5:

Est-ce-que les fonctions suivantes sont continue au point $x_0 = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + x\cos(\frac{1}{x}) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 6:

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leurs domaines de définition respectifs:

$$f(x) = \frac{x^3+2x+3}{x^3+1}, \qquad g(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}.$$

Étudier l'existence d'un prolongement par continuité à tout $\mathbb{R}$.

Exercice 7:

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0) > 0$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a < 1$. Montrer alors qu'il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) = x_0$.