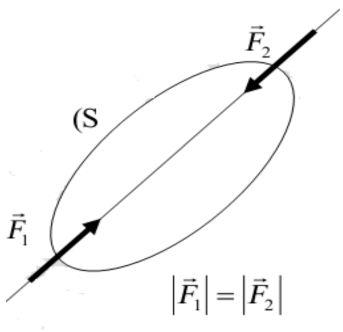
3.1. Axiomes de la Statique

3.1.1.1ier Axiome (Principe d'équilibre)

Un solide (S), sur lequel agit un système de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ne peut se trouver en équilibre que dans les cas où :

$$\begin{cases} |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|; \\ \text{même direction et Autrement dit : } (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv 0; \\ \text{sens opposés.} \end{cases}$$

2 cas se présentent



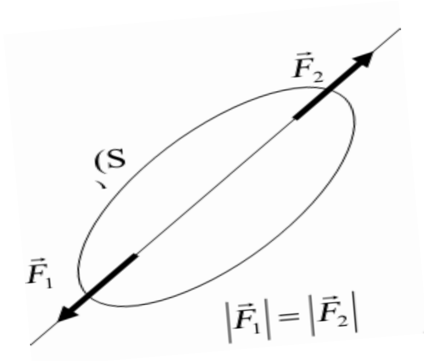


Figure 3.1 :1iér Axiome.

3.1.2.2ième Axiome (Principe de l'action et de la réaction)

Les forces exercées par deux solides l'un sur l'autre sont toujours de même module, de même direction et de sens opposé.

$$\begin{cases} F_A = -F_B; \\ \text{Même support;} \\ \text{Même grandeur} \\ \text{sens opposés.} \end{cases}$$

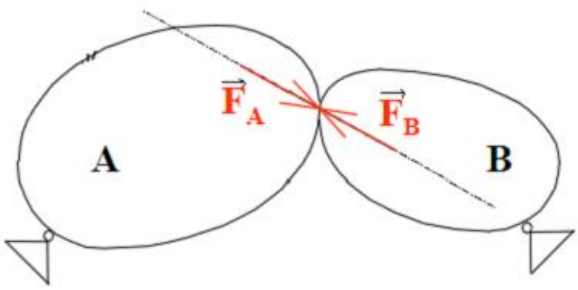


Figure 3.2 : 2ième Axiome.

3.1.3. 3ième Axiome (Principe du Parallélogramme)

Deux forces, agissantes sur un solide en un même point, admettent une résultante appliquée en ce point et représentée par la diagonale du parallélogramme ayant ces forces comme cotés.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

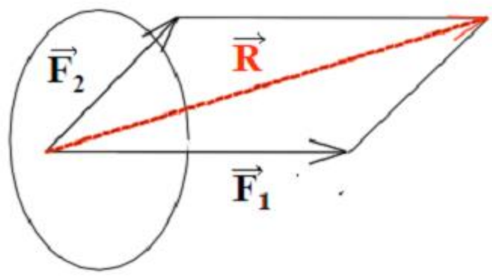


Figure 3.3 : 3ième Axiome.

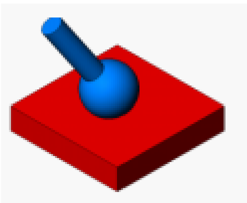
3.2. Liaisons des corps solides

Dans la mécanique, on dit solide libre ou lié :

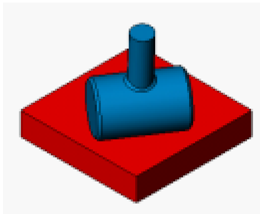
- Libre $\longrightarrow$ il peut se déplacer en toute direction
- Liés $\longrightarrow$ ne peut se déplacer que dans des directions déterminées.

3.3. Zones de Contacts

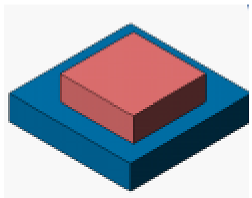
Le solide parfait est une masse de matière occupant un volume indéformable, donc délimité par une surface indéformable. Une partie de cette surface peut être constituée de points communs à la surface d'un autre solide : c'est le **contact**.



Contact ponctuelle



Contact linéique



Contact surfacique

Figure 3.4 : Types de contacts.

3.4. Degrés de liberté (ddl)

Dans l'espace à **3** dimensions, (figure 3.5) un solide indéformable possède au maximum **6** possibilités de **mouvements indépendants** sur chacun des trois axes $(O,\vec{x})$, $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$

il y a deux types de mouvements possibles : soit :

- **3 translations** suivant les 3 axes : T_x , T_y, T_z ;
- **3 rotations** autour des 3 axes : R_x, R_y, R_z.

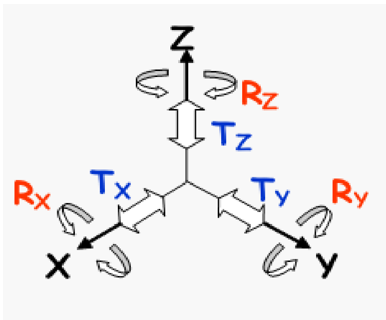


Figure 3.5 : Degrés de liberté.

3.5. Liaisons normalisées

Il existe **11** liaisons normalisées, qu'il convient de connaître absolument. Elles représentent les liaisons les plus utilisées en industrie, et les plus courantes. Ces liaisons sont définies par les degrés de liberté (ddl) qu'elles permettent.

3.6. Type des appuis

3.6.1. Appui simple

Un solide S_1 est en appui simple sur un solide S_2, si le contact entre S_1 et S_2 est ponctuel et permet deux degrés de liberté de S_1 par rapport à S_2, donc un appui simple permet de bloquer la translation dans une seule direction. La réaction d'appui est donc perpendiculaire au plan tangent de l'appui.

3.6.2. Appui double

Un appui double permet de bloquer les translations dans les deux directions.

3.6.3. Appui encastré

L'encastrement ne permet aucun degré de liberté de S_1 par rapport à S_2, donc il bloque tous les déplacements (translations et rotation). La réaction d'appui de S_2 sur S_1 a alors trois composantes. Il y a donc l'apparition d'une réaction d'appui et d'un moment dit d'encastrement « M » bloquant la rotation. billettes. La figure 3.6 illustre les différents types de liaisons.

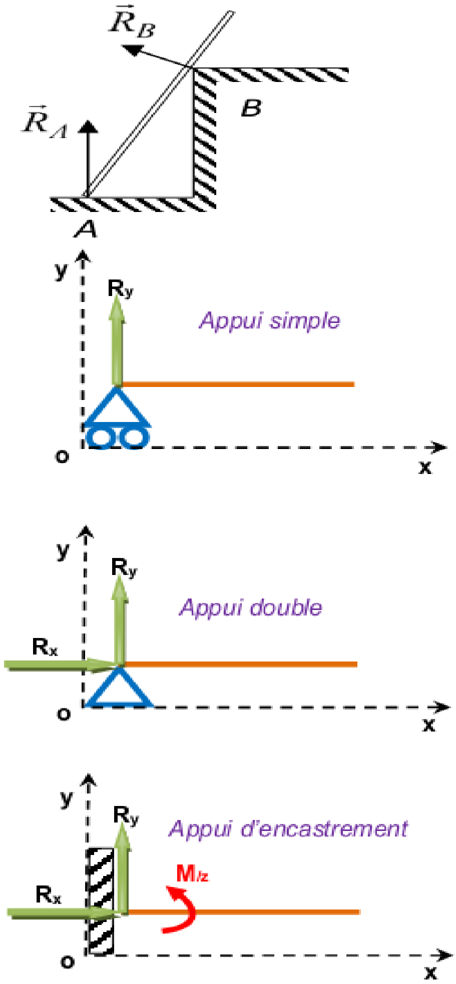


Figure 3.6 : Type des appuis avec présentation des coordonnées de réaction.

3.6.4. Solides articulés (Appuis doubles)

Dans la pratique, on trouve parfois le corps solide articulé soit par un appui articulé, une articulation cylindrique (liaison pivot glissant, liaison linéaire annulaire), ou une articulation sphérique (liaison rotule). Le module et la direction de la réaction $\vec{R}$ dans son plan sont inconnus.

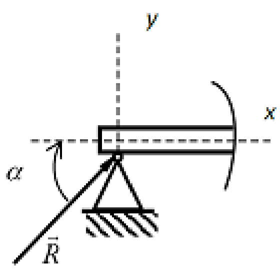


Figure 3.7 : (a) Un appui articulé.

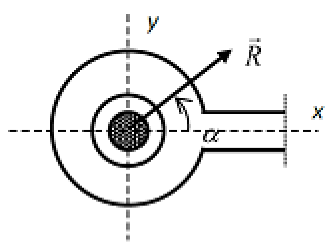


Figure 3.7 : b) Une articulation cylindrique.

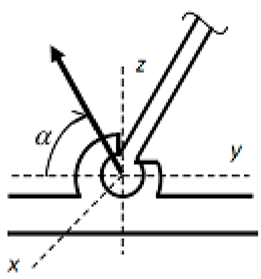


Figure 3.7 : (c) Une articulation sphérique.

3.6.5. Liaison flexible (fil, corde, chaîne)

La réaction $\vec{T}$ porte le nom de tension. Elle est appliquée au point d'attache du lien flexible au solide, dirigée le long de la liaison flexible (du fil, de la corde, de la chaîne, etc…..)

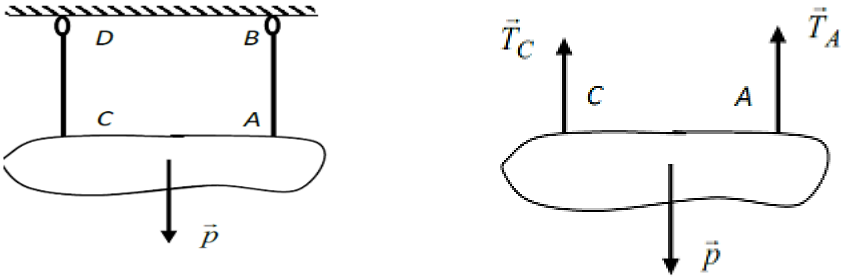
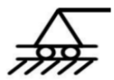
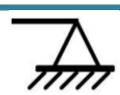
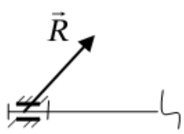
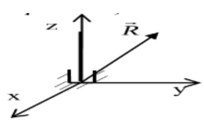
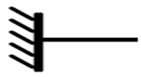


Figure 3.8 : La liaison flexible.

Nous représentons dans le tableau ci-dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaison	Composantes de la réaction	Modélisation	Inconnue de liaison
Appuis simple rouleau ou surface lisse sans frottement	La réaction est normale au point d'appui		1-Inconnue 
Appui double (ou fixe, ou articulation)	Deux composantes dans le plan de contact		2-Inconnues 
Articulation cylindrique de l'axe OZ	La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle		2-Inconnues
Articulation sphérique	Trois composantes		3-Inconnues
Encastrement	Trois composantes plus le moment au point D'encastrement		3-Inconnues 

3.7. Moments des forces

3.7.1. Moment d'une force par rapport a un point

Le moment $\vec{M}_O(\vec{F})$ par rapport à un point O, d'une force $\vec{F}$ appliquée au point A est égale au produit vectoriel indiqué par la relation : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$

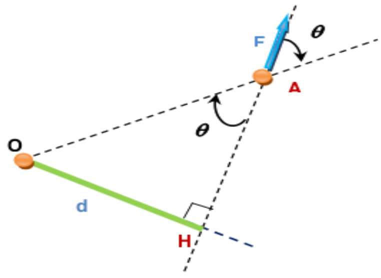


Figure 3.9 : Moment de rotation d'une force.

Le moment $\vec{M}_O(\vec{F})$ est un vecteur ayant toutes les propriétés d'un produit vectoriel (Figure 3.10) .

$\vec{M}_O(\vec{F}) = OA.F \sin\theta = F.d$. Unité: N.m (Newton mètre)

Exemple :

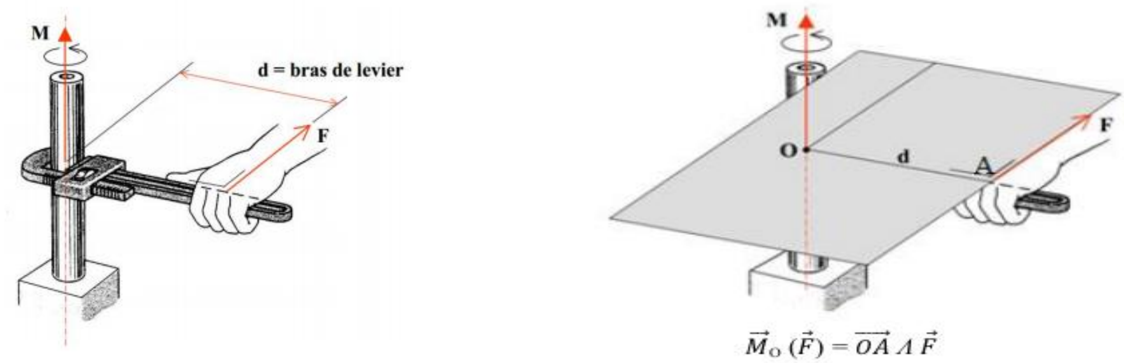


Figure 3.10 : Sens de rotation de levier par rapport au point O.

Remarque :

- En fonction du repère choisi, si l'effort tend à faire tourner dans le sens trigonométrique, le moment sera de signe positif.

3.7.2. Moment d'une force par rapport à un axe

Considérons la force $\vec{F}$ dans le repère $R(O, x, y, z)$ et $\vec{r}$ le vecteur de position du point d'application de la force $\vec{F}$ à l'origine O. La force $\vec{F}$ s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x.\vec{x} + F_y.\vec{y} + F_z.\vec{z}$$

Où $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ et $\vec{F}_z$ sont les projections de $\vec{F}$ sur les axes Ox, Oy et Oz. Ainsi le vecteur de position $\vec{r}$ dans le même repère s'écrit :

$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x.\vec{x} + r_y.\vec{y} + r_z.\vec{z}$

Où $\vec{r}_x, \vec{r}_y$ et $\vec{r}_z$ sont les projections de $\vec{r}$ sur les axes Ox, Oy et Oz.

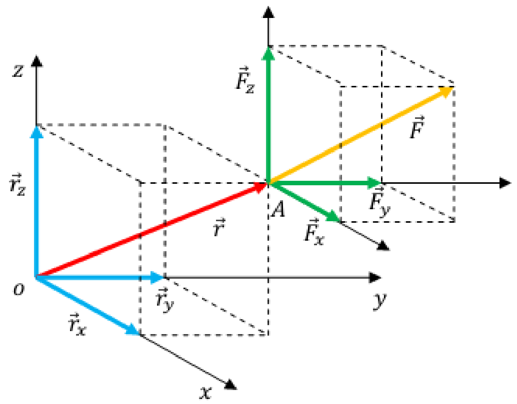


Figure 3.11 : Moment d'une force par rapport à un axe.

Le vecteur moment d'une force par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = (r_y F_z - r_z F_y)\vec{x} + (r_z F_x - r_x F_z)\vec{y} + (r_x F_y - r_y F_x)\vec{z}$$

Où $\vec{M}_O(\vec{F}) = M_{Ox}(\vec{F})\vec{x} + M_{Oy}(\vec{F})\vec{y} + M_{Oz}(\vec{F})\vec{z}$

Les composantes du vecteur moment $M_O(\vec{F})_{Ox}, M_O(\vec{F})_{Oy}$ et $M_O(\vec{F})_{Oz}$ sont les moments par rapport aux axes Ox, Oy et Oz respectivement dans le point O, et sont exprimés comme suivant :

$$(\vec{M}_O(\vec{F}))_{Ox} = M_{Ox}(\vec{F}) = r_y F_z - r_z F_y$$

$$(\vec{M}_O(\vec{F}))_{Oy} = M_{Oy}(\vec{F}) = r_z F_x - r_x F_z$$

$$(\vec{M}_O(\vec{F}))_{Oz} = M_{Oz}(\vec{F}) = r_x F_y - r_y F_x$$

-la direction de la force rencontre l'axe (h = 0)

-la force est parallèle à l'axe (la projection de $\vec{F}$ sur un plan h à l'axe sera nulle).

3.8. Condition d'équilibre statique

3.8.1. Cas Général

Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère fixe (R) reste en équilibre sous l'action de n forces extérieures : $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 .... \vec{F}_n$:

a) La résultante des forces extérieurs en tout point O est nul où : $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

b) La somme des moments des forces en tout point O est nul : $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + (\vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_3) + \dots\dots\dots\dots\dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \vec{0}$$

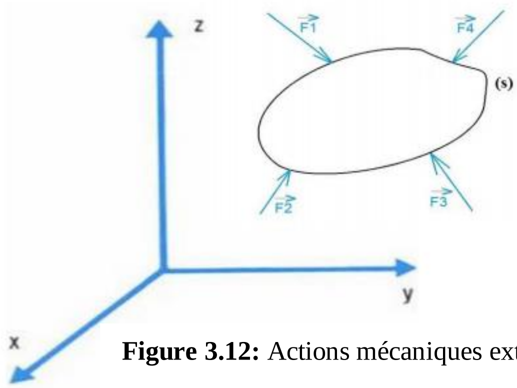


Figure 3.12: Actions mécaniques extérieures.

3.8.2. Condition d'équilibre analytique

3.8.2.1. Forces quelconques

La condition d'équilibre analytique d'un corps solide est que la projection des éléments (forces extérieures, moments) soit nulle. Cette projection sur les axes d'un repère orthonormé $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ permet d'obtenir en général six équations :

- Trois équations liées à la résultante des forces extérieures :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

Et, trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{ix}(\vec{F}_i) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iy}(\vec{F}_i) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iz}(\vec{F}_i) = \vec{0} \end{cases}$$

3.8.2.2. Forces concourantes

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre **O**, (les forces passent toutes par le même point O), le moment sera nul par rapport à O, il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante: $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$

- **Forces planes**

Dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre.

-Deux équations liées à la résultante statique

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \end{cases}$$

-Et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O : $\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$

- **Forces parallèles**

Dans le cas d'un système de forces parallèles, où un couple, une équation pour le moment des forces par rapport au centre O :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

3.9. Conditions d'équilibre géométrique

Pour que le système de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé.

3.10. Axiome des liaisons

Pour tout corps solide lié, il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et, de le considérer comme un corps solide libre soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons.

Exemple

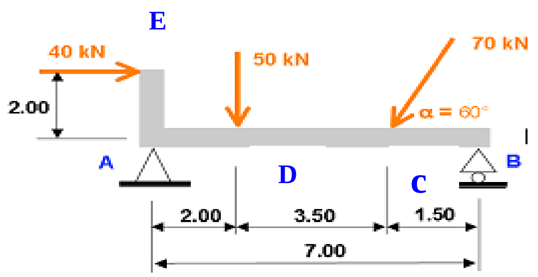


Figure 3.13 : (a) Corps solide lié.

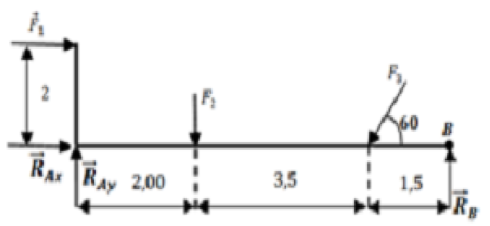


Figure 3.13 : (b) Corps solide libre.

- Calculer les réactions d'appuis de la poutre ci-dessus.