Chapitre I : Outils Mathématiques

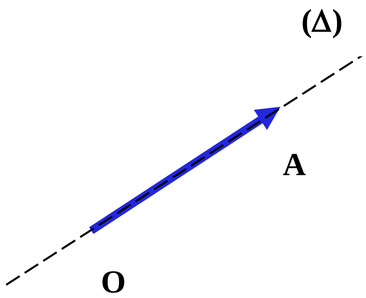
1.1.Introduction

Dans ce chapitre nous étudieront les opérations mathématiques sur les vecteurs.

1.2.Vecteurs et Scalaires

Des grandeurs telles que longueur, surface ou masse se laisse décrire complètement par des nombres réels ou scalaires. D'autres, telles que vitesse, accélération ou force nécessitent qu'on précise en plus de leur intensité, leur direction et leurs sens. Ces grandeurs sont désignées mathématiquement par des objets qu'on appellera " vecteurs ".

1.2.1. Notion de vecteur



Un vecteur est un segment de droite ***OA*** sur lequel on a choisi une origine ***O*** et une extrémité A ; il est défini par :

- son origine (point d'application) ;
- sa direction (support);
- son sens et son module (intensité).

- La direction est la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ mesure entre un axe de référence et le support.
- Le sens représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.
- L'intensité, norme ou module, représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur. Graphiquement, elle correspond à la longueur de celui-ci. Notation :
- Le point d'application est le point qui sert d'origine à un représentant (ou image) du vecteur.

1.2.2. Classification des vecteurs

Il existe plusieurs types de vecteurs :

- Vecteur libre : la direction, le sens et le module sont donnés mais la droite support et le point d'application (origine du vecteur) ne sont pas connues ;

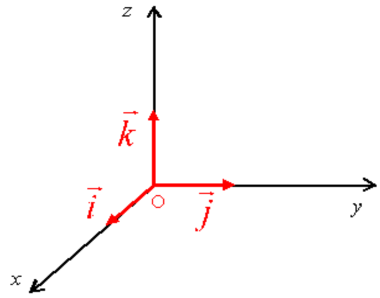
- Vecteur glissant : le point d'application (origine du vecteur) n'est pas fixé

- Vecteur lié : tous les éléments du vecteur sont déterminés

- Vecteur unitaire : c'est un vecteur dont le module est égal à 1.

1.2.3. Composantes d'un vecteur

1.2.3. a. Vecteurs unitaires

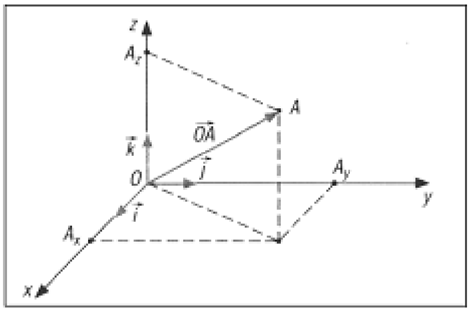


Les vecteurs $\vec{i}$ $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires d'intensité égale à 1. $\vec{i}$ $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère orthonormé $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1.2.3. b. Vecteurs positions

Les vecteurs positions sont utilisés pour repérer la position d'un point ou pour représenter un segment ou une distance.

- ✓ **Position d'un point A dans l'espace**



$$\begin{cases} \vec{OA} \begin{cases} X_A = OA_x \\ Y_A = OA_y \\ Z_A = OA_z \end{cases} \\ \vec{OA} = \vec{X}_A.\vec{i} + \vec{Y}_A.\vec{j} + \vec{Z}_A.\vec{k} \end{cases}$$

- ✓ **Représentation d'une distance**

$$\vec{OA}\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \vec{OB}\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = (\vec{X}_B - \vec{X}_A).\vec{i} + (\vec{Y}_B - \vec{Y}_A).\vec{j} + (\vec{Z}_B - \vec{Z}_A).\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

1.2.3. c. Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre réel et $\vec{V}$ un vecteur, leur produit est un vecteur $\vec{W}$ tel que : $\vec{W} = \lambda.\vec{V}$.

Le vecteur $\vec{W}$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$.

1.2.3.d. Produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{A}.\vec{B} = \|A\|.\|B\|.\cos(\theta)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z$$

- ✓ **Propriétés du produit scalaires**
  - $\vec{A}.\vec{B} = .\vec{B}.\vec{A}$
  - $(\vec{A}. + \vec{B}).\vec{C} = .\vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C}$
  - $\lambda(\lambda(\vec{A}.\vec{B}) = .(\lambda\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(\lambda\vec{B})$

Exemple : déterminons le produit scalaire des vecteurs $\vec{A} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{B} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$, $F_3 = 4\vec{i} + \vec{j}$

$$\vec{A}.\vec{B} = (4.7) + (4.(-3)) = 28 - 12 = 16$$

$$A = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.66$$

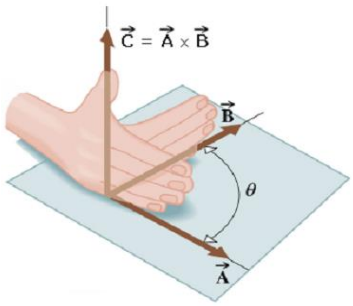
$$B = \sqrt{7^2 + (-3^2)} = 7.62$$

$$\theta = 68.2°$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 5.66.7.62.\cos(68.2°) = 16$$

$$\vec{A}.\vec{B} = .(4.7) + (4.(-3)) = 28 - 12 = 16$$

1.2.3. e. Produit vectoriel de deux vecteurs



$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\sin(\theta).\vec{u}_c$$

$$\vec{A} = \begin{cases} A_x \\ A_y \\ A_z \end{cases} \quad ; \quad \vec{B} = \begin{cases} B_x \\ B_y \\ B_z \end{cases}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{cases} A_x \\ A_y \\ A_z \end{cases} \wedge \begin{cases} B_x \\ B_y \\ B_z \end{cases} = \begin{vmatrix} A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_z & B_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{cases} A_y.B_z - A_z.B_y \\ A_z.B_x - A_x.B_z \\ A_x.B_y - A_y.B_x \end{cases}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y.B_z - A_z.B_y)\vec{i} + (A_z.B_x - A_x.B_z)\vec{j} + (A_x.B_y - A_y.B_x)\vec{k}$$

- ✓ **Propriétés du produit vectoriel**

- $\vec{C}$ est à la fois perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- Le produit vectoriel n'est pas commutatif $(\vec{A} \wedge \vec{B}) = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$
- $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
- $\lambda(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\lambda\vec{A}) \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge (\lambda\vec{B})$
- $(\vec{A} \wedge \vec{A}) = -(\vec{A} \wedge \vec{A}) = \vec{0}$

- Si $(\vec{A} // \vec{B})$ alors $(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$

✓ **Double produit vectoriel**

$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

1.2.3. f. Produit vectoriel des vecteurs unitaires d'une base orthonormée

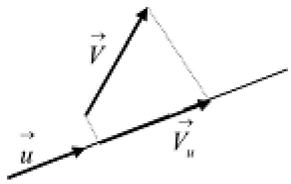
Si $b = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée et directe nous avons :

Sens direct : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

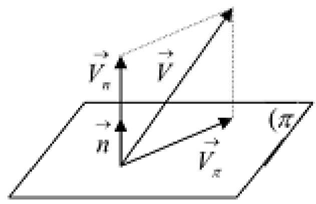
Sens opposé : $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

✓ **Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe** La projection orthogonale d'un vecteur sur un axe dont le vecteur unitaire est $\vec{u}$ est donné par : $\vec{V}_u = (\vec{V}.\vec{u})\vec{u}$

✓ **Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan**



Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque, et (π) un plan de l'espace défini par la normale $\vec{n}$. La projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ est la composante $\vec{V}_\pi$ dans le plan. Le vecteur $\vec{V}$ a deux composantes l'une dans le plan et l'autre perpendiculaire au plan.



$$\vec{V}_\pi = \vec{V} - \vec{V}_n = \vec{V} - (\vec{V}.\vec{n})\vec{n}$$

Où sous la forme $\vec{V}_\pi = (\vec{n}.\vec{n})\vec{V}_n - (\vec{V}.\vec{n})\vec{n}$ qui représente le double produit vectoriel : $\vec{V}_\pi = \vec{n} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{n})$

1.3. Repérage des vecteurs : bases d'écriture

1.3.1. Base de l'espace vectoriel

On appelle base de l'espace vectoriel ***E***, de dimension trois, tout triplet de vecteurs linéairement indépendants tel que tout vecteur $\vec{V}$ de ***E*** puisse s'écrire de façon unique :

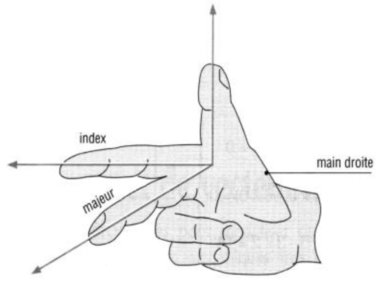
$\vec{V} = V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}$ dans la base $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

1.3.2. Base orthonormée directe

Une base $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est dite **orthonormée** si ses vecteurs sont :

orthogonaux deux à deux : on aura donc $\vec{x}\perp\vec{y}$, $\vec{y}\perp\vec{z}$ et $\vec{z}\perp\vec{x}$;

de normes égales à l'unité :on aura donc $\|\vec{x}\|=\|\vec{y}\|=\|\vec{z}\|=1$.

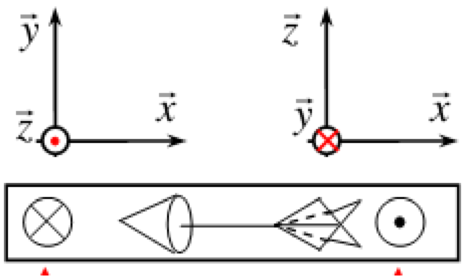


Une base orthonormée sera **directe** si ses vecteurs respectent « la règle des trois doigts de la main droite » ou « règle du vissage » ou « règle du bonhomme d'Ampère ».

La mise en œuvre de cette forme directe le sera vectoriellement par le produit vectoriel : voir ci-après. Dans une projection plane d'une base orthonormée directe, on passe de x vers y ou de y vers z ou de z vers x de façon directe (sens positif), à condition que le 3e vecteur « pointe vers nous ».

Remarque :

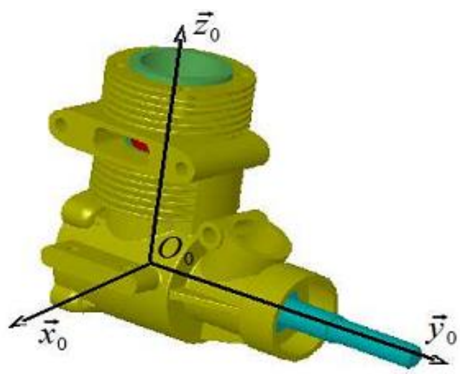
Dans les études mécaniques (cinématique, statique, dynamique) on utilisera toujours des repères orthonormés directs. Si cette condition n'est pas respectée, des erreurs de calcul seront commises !



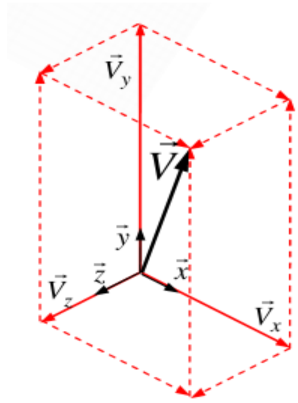
1.3.3. Repère orthonormé direct de l'espace affine

Un repère R de l'espace affine E est constitué par un point **origine** du repère O et une **base** orthonormée directe $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de l'espace vectoriel réel ***E*** associé à ***E***. Ce repère est le plus souvent noté $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Donc le cas de la cinématique, on associera généralement un repère à un solide. Le repère restera fixe $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ (attaché) par rapport au solide. On définira autant de repères que de solides.

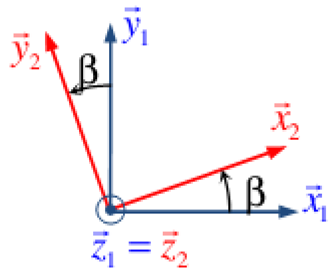


1.3.4. Composantes et projections

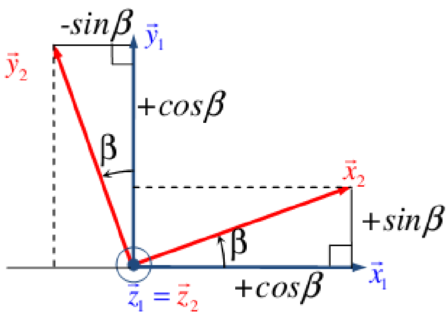


On appelle « composantes du vecteur V dans la base *R* » les projections vectorielles du vecteur $\vec{V}$ sur les vecteurs la base R. Ainsi le vecteur $\vec{V}$ possède 3 composantes $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$ et $\vec{V}_z$ telles que : $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z = V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}_z$

1.3.5. Changement de base d'un vecteur, par projections



On définit la base $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, et la base $R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ comme suit : On appelle cette figure : rotation plane, ou figure de calcul. Sachant que le passage d'une base à une autre peut se faire par maximum trois rotations, il faut parfois plusieurs figures planes pour illustrer le passage d'une base à une autre, mais on se servira toujours de cet outil simple et graphique.

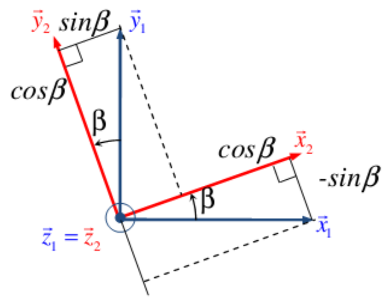


Si l'on désire écrire dans la base 1 un vecteur que l'on connait dans la base 2, il convient d'abord d'écrire les vecteurs unitaires de la base 2 dans la base 1. Pour cela on écrit qu'un vecteur est égal à la somme de ses projections dans les trois directions de la base souhaitée :

On a donc : $\vec{x}_2 = \cos(\beta).\vec{x}_1 + \sin(\beta).\vec{y}_1$

$$\vec{y}_2 = -\sin(\beta).\vec{x}_1 + \cos(\beta).\vec{y}_1$$

$$\vec{z}_2 = \vec{z}_1$$



De même, si l'on veut écrire dans la base 2 un vecteur que l'on connait dans la base 1, il faudrait d'abord écrire les vecteurs unitaires de la base 1 dans la base 2 :

$$\vec{x}_1 = \cos(\beta).\vec{x}_2 - \sin(\beta).\vec{y}_2$$

$$\vec{y}_1 = \sin(\beta).\vec{x}_2 + \cos(\beta).\vec{y}_2$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_2$$

<u>Exemple</u> :

Soit : $\vec{V}_1 = 3.\vec{x}_1 + 2.\vec{y}_2$ dans la base R_1 : $\vec{V} = (3 - 2.\sin(\beta)).\vec{x}_1 + 2.\cos(\beta).\vec{y}_1$

On préfèrera toutefois écrire les vecteurs dans leur forme la plus simple, et donc pas forcément dans une base donnée. Par exemple le vecteur $\vec{V}_1 = 3.\vec{x}_1 + 2.\vec{y}_2$ ne sera pas projeté dans une base particulière pour les calculs (sauf pour connaître sa norme).

Remarque :

La non indication de la base d'écriture est évidemment totalement incohérente et sera lourdement sanctionnée !!!

1.3.6. Fonction vectorielle

Si à chaque valeur d'une variable scalaire t correspond un vecteur $\vec{V}(t)$, ce vecteur est appelé « fonction vectorielle » de t . $\vec{V}(t)$ est donc un vecteur dont le module, la direction et le sens dépendent de la variable t (qui sera en générale le temps).

1.3.7. Règles de dérivation

Dans une base (O,x, y, z) fixe, le vecteur $\vec{V}(t)$ est donné par :

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

La dérivée de $\vec{V}(t)$ est définit par :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \lim \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

à condition a cette limite existe.

On utilisera comme notation, dans le cas ou t représente le temps, sachant que la dérivée des vecteurs unitaires sont nuls (constant en grandeur et en direction) :

$$\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{V}}(t) = \dot{V}_x(t)\vec{i} + \dot{V}_y(t)\vec{j} + \dot{V}_z(t)\vec{k}$$

De même, on peut définir des dérivées d'ordre supérieur. Par exemple, la dérivée seconde de $\vec{V}(t)$ est donnée par :

$$\ddot{\vec{V}}(t) = \frac{d^2\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2V_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{d^2V_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{d^2V_z(t)}{dt}\vec{k},$$

$$\ddot{\vec{V}}(t) = \ddot{V}_x(t)\vec{i} + \ddot{\vec{V}}(t)\vec{j} + \ddot{\vec{V}}(t)\vec{k}$$

1.4. Exercices sur les outils mathématiques

Exercice N° 01 :

Soit les points dans le plan (OXY) : A (-2,3) ; B (3,1) ; C (1,4) ; D (5,3).

1) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ ainsi que le module, la direction et le sens de ses vecteurs.
2) Représenter graphiquement ces vecteurs.

Exercice N° 02 :

Soit les points dans le plan (OXY) : A(1,4,3) ; B(2,3,5) ; C(5,2,-1) ; D(-3,4,7).

1) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD}$.

- $\vec{AB}+\vec{CD}$;
- $\vec{AB}.\vec{CD}$;
- $\vec{AB}\wedge\vec{CD}$;
- $\|\vec{AB}\|.\|\vec{CD}\|$;
- $\|\vec{AB}\wedge\vec{CD}\|$.

Exercice N° 03 :

Soit les vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}\ \vec{V_3}$ et $\vec{V_4}$ tel que : vecteurs

$\vec{V_1}(a, 4, 2)$, $\vec{V_2}(2, 3, b)$, $\vec{V_3}(1, 4, c)$, et $\vec{V_4}(2, 3, 7)$

1) Déterminer a et b pour que les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ soient colinéaires ;
2) Déterminer la valeur de c pour que les vecteurs $\vec{V_3}$ et $\vec{V_4}$ soient perpendiculaires.

Exercice N° 04 :

Soit le solide surfacique homogène suivant formé d'un quart de couronne circulaire de rayon intérieur **R₁** et extérieur **R₂** comme représenté sur la figure.1

1) Ecrire la matrice de passage du repère $R_1(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ vers le repère $R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ **;**

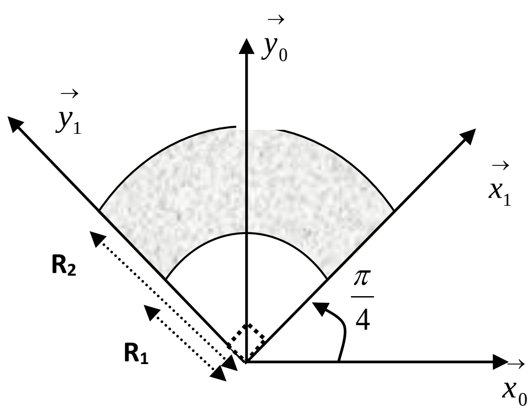


Figure : 01

CHAPITRE 2 : Généralités et définitions de base

2.1. Introduction

Dans ce chapitre on aborde des notions sur le point matériel, le corps solide parfait, la force, types des forces, le moment d'une force et les modèles mécaniques.

2.2. Notions fondamentales de la statique

2.2.1. Point matériel

On appelle un point matériel, une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables dans les conditions du problème considéré. La différence par rapport au point géométrique, réside en le fait que le point matériel est supposé contenir une certaine quantité de matière concentrée. Un point matériel jouit donc de la propriété d'inertie, et d'interactions avec d'autres points matériels.

2.2.2. Corps solide parfait

Tout corps physique se présente en mécanique comme un système de points matériels : on entend par-là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction. Par corps solide, on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement, le corps solide conserve une forme géométrique constante (il reste indéformable) tant dans son ensemble qu'en chacune de ses parties.

2.2.3. Force

On appelle force la grandeur vectorielle décrivant une Interaction capable de produire un mouvement ou de créer une déformation. D'une façon générale, les forces représentent l'action d'un corps sur un autre. Toute force peut être représentée par un vecteur dont les quatre propriétés sont :

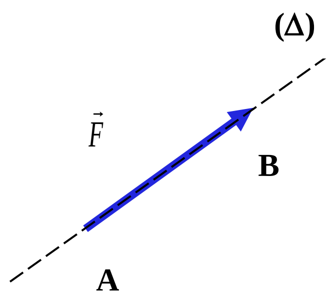


Figure 2.1 : Représentation vectorielle d'une force.

- ✓ Direction : (Δ)
- ✓ Sens : A ⟶ B
- ✓ Point d'application : A point où l'action s'exerce sur le corps
- ✓ Le module : la valeur (norme) de la force : $\|\vec{F}\| = \|\vec{AB}\|$

2.2.4. Opérations sur forces

2.2.4. a. Somme vectorielle

Soit n vecteurs $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, de coordonnées: $\vec{F}_i = F_{ix}.\vec{i} + F_{jy}.\vec{j} + F_{kz}.\vec{k}$

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F} = \sum_1^n Fi = \sum_1^n F_{ix}.\vec{i} + F_{ix}.\vec{j} + F_{ix}.\vec{k}$$

Exemple : déterminons la somme des trois vecteurs $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.

$$\vec{F}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j}\ ,\ F_2 = 3\vec{i} + 3\vec{j}\ ,\ F_3 = 4\vec{i} + \vec{j}$$

$$F_1.\vec{i} + F_2.\vec{j} + F_3.\vec{k} = (-1+3+4)\vec{i} + (2+3+1)\vec{j} = 6\vec{i} + 6\vec{j}\ .$$

✓ **Propriétés de la somme vectorielle**

- La somme vectorielle est commutative : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$
- La somme vectorielle est associative : $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$
- L'élément neutre est défini par : $\vec{F} + \vec{0} = \vec{F}$
- A tout vecteur $\vec{F}$ correspond un vecteur opposé noté $\vec{F}$ tel que $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$

✓ **Formules utiles pour les additions de vecteur**

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB.\cos c}$$

$$B = \sqrt{C^2 + A^2 - 2CA.\cos b}$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC.\cos a}$$

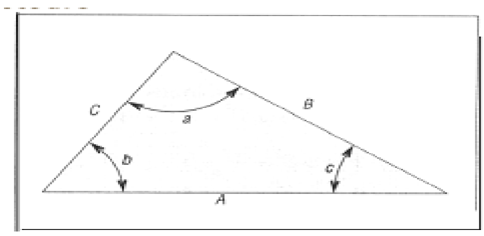


Figure 2.2 : Triangle.

2.2.4.b. Composition orthonormé

Les systèmes de forces sont classés en trois catégories : Concourants dont les lignes d'action de toutes les forces du système passent par un même point. Parallèles : les lignes d'actions des forces sont toutes parallèles.

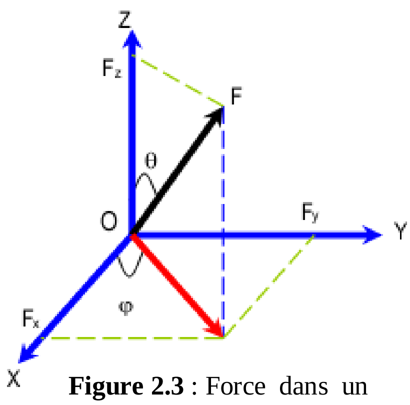


Figure 2.3 : Force dans un repère orthonormé.

Non concourantes et non parallèles : les forces ne sont pas toutes concourantes et pas toutes parallèles. Soit une force $\vec{F}$ appliquée à l'origine O d'un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ comme il est indiqué sur la figure 2.2. Les composantes de cette force sont définies par $\vec{F} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k}$, $\vec{F} = F\cos\theta\cos\varphi.\vec{i} + F.\sin\theta\sin\varphi.\vec{j} + F\cos\theta.\vec{k}$ avec $\|\vec{F}\| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

La projection de la force $\vec{F}$ sur les trois axes OX, OY, OZ donne respectivement les angles $\theta_x, \theta_y, \theta_z$, voir la figure 2.3.

Nous aurons alors : $\begin{aligned} F_x &= F\cos\theta_x \\ F_y &= F\cos\theta_y \\ F_z &= F\cos\theta_z \end{aligned}$

donc : $\vec{F} = F(\cos\theta_x.\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}) = F\vec{u}$

Le vecteur $\vec{u}$ a la même direction que la force $\vec{F}$ et présente le vecteur unitaire.

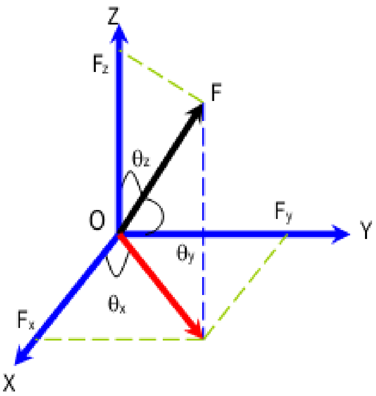


Figure 2.4 : Force dans un repère orthonormé.

2.2.4.c. Composition quelconque

Si deux forces appliquées en même point peuvent être remplacées par leur résultante, inversement, on peut remplacer une force $\vec{F}$ par deux autres

(a) Directions de la décomposition forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$

de direction quelconque comme il est illustré dans la figure 2.5. Les grandeurs de $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ se déterminent on utilisant la formule de sinus. $\dfrac{F_1}{\sin\alpha} = \dfrac{F_2}{\sin\beta} = \dfrac{F}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))}$

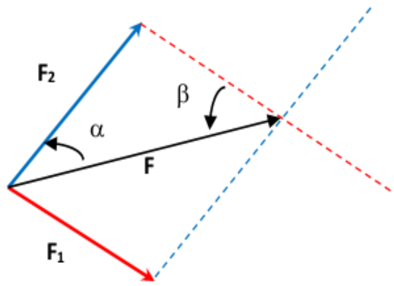


Figure 2.5 : La résultante de la force.

2.2.4.d. Décomposition de force

La décomposition d'un vecteur $\vec{F}$ consiste à écrire le vecteur comme une somme de deux autres vecteurs $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ appelés **composantes** du vecteur :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

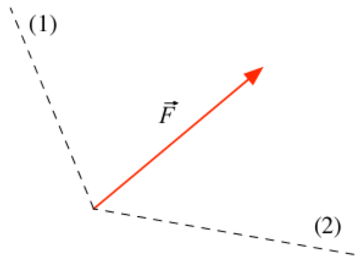


Figure 2.6. (a) Directions de la décomposition.

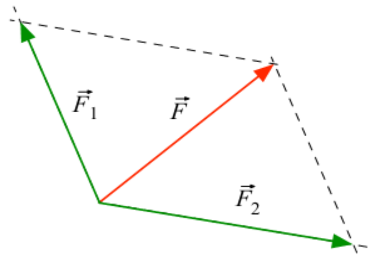


Figure 2.6. (b) Composantes du vecteur.

La figure 2.6.a montre le vecteur $\vec{F}$ et les directions (1) et (2) suivant lesquelles on veut le décomposer. Sur ces directions on construit le parallélogramme dont $\vec{F}$ est la diagonale. Les composantes cherchées $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont alors les côtés du parallélogramme (figure 2.6.b).

2.3. Moment d'une force par rapport a un point

2.3.1. Définition du moment d'une force par rapport à un point

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point *O* est égal au produit vectoriel du rayon vecteur $\vec{r} = \vec{OA}$, joignant le point *O* à l'origine *A* de la force, par la force $\vec{F}$ elle-même.

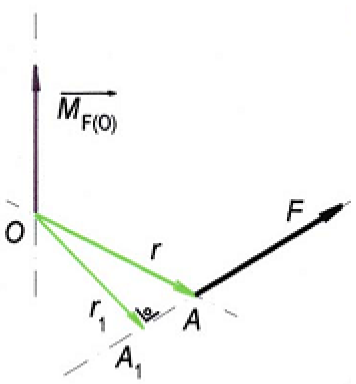


Figure 2.7. (a) Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un

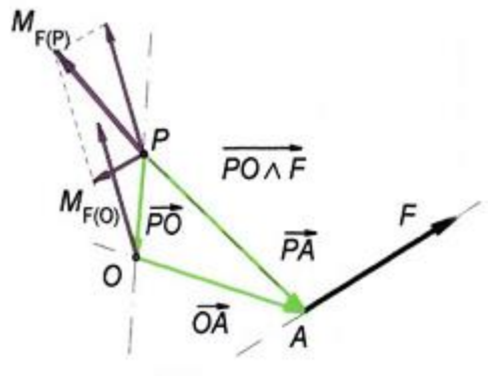


Figure 2.7. (b) Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport un

Remarques

- ✓ Le moment de la force par rapport à un point est une grandeur vectorielle liée au point ayant pour origine le point considéré.
- ✓ La définition du moment de la force est indépendante de la position du point A choisi sur la ligne d'action de la force $\vec{F}$.

En effet, on peut écrire :

$$(\vec{r}_1 + A_1\vec{A}) \wedge \vec{F} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} + A_1\vec{A} \wedge \vec{F}$$

Le produit vectoriel $A_1\vec{A} \wedge \vec{F}$ est nul car le s deux vecteurs $A_1\vec{A}$ et $\vec{F}$ sont alignés. Ainsi :

$$(\vec{r}_1 + A_1\vec{A}) \wedge \vec{F} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}$$

- ✓ Le moment d'une force par rapport à un point est très souvent défini comme le produit de la force par son « bras de levier ». Cette définition est incorrecte au point de vue vectoriel.
- ✓ Système d'unités : la force $\vec{F}$ s'exprime en newtons, la longueur du rayon vecteur $\vec{r}$ en mètres. En conservant la définition fondamentale, le moment d'une force par rapport à un point doit se donner en mN.

2.4. Types de force (ponctuelle, linéique, surfacique, volumique)

Selon le type de contact nous pouvons classer les forces en :

- ✓ **Force ponctuelle :** contact ponctuel ;
- L'action passe par le point de contact A.
- La direction de l'action de S_1 sur S_2 notée A est perpendiculaire au plan tangent commun si on néglige les frottements.

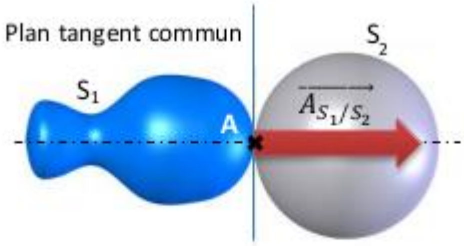


Figure 2.8 : Contact ponctuelle.

- Le sens est du solide S_1 vers le solide S_2.
- Le module $\left\|\vec{A}_{S_1/S_2}\right\|$ est défini par la longueur du vecteur $\vec{A}_{S_1/S_2}$, l'unité est le newton.
- ✓ **Force linéique :** contact linéique dans le cas d'une répartition uniforme, on remplacera une force par une action unique au milieu de la ligne de contact ;

On supposera l'action répartie uniformément sur toute la ligne du contact.

- Dans le cas d'une répartition uniforme, on peut remplacer cette charge linéique par une action concentrée en C au milieu du contact [AB] telle que :
- $\left\|\vec{C}_{1/2}\right\| = q.l$ avec l la longueur du segment [AB].

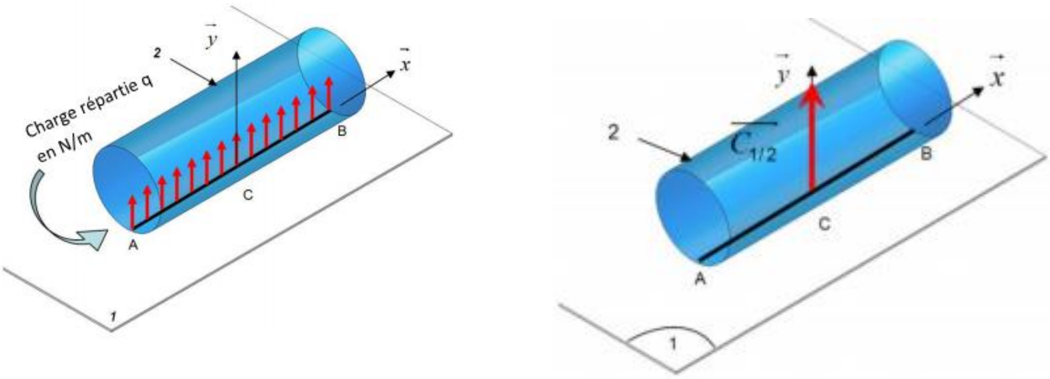


Figure 2.9 : Contact linéique.

✓ **Force surfacique :** contact surfacique, par exemple force de pression ;

Dans le cas d'une répartition uniforme d'une pression sur une surface, ente deux solides ou entre un solide et un fluide, on modélisera l'ensemble des micro-actions mécaniques par une résultante globale au centre de gravité qui vaudra :

$$\left\|\vec{F}_{fluide/1}\right\| = P.S$$

- p : pression du fluide en pascal (Pa).
- S : surface de contact en m^2.
- $\left\|\vec{F}_{fluide/1}\right\|$: Résultante des forces de pression en N.

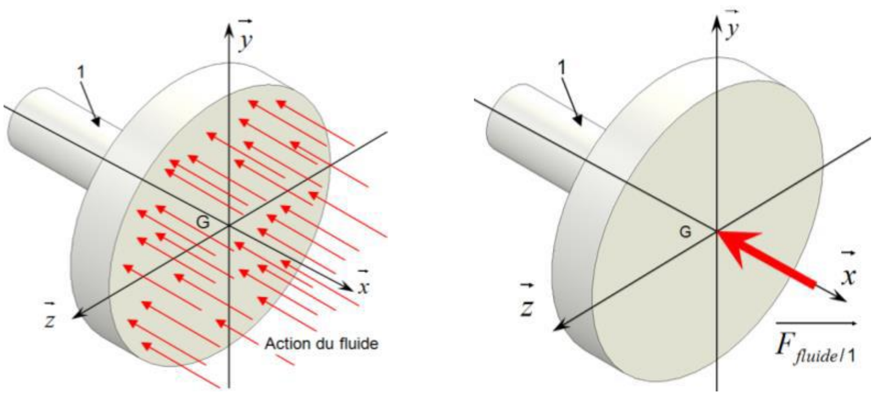


Figure 2.10 : Contact surfacique.

- ✓ **Force volumique :** ce sont des forces qui s'exercent sur la totalité du corps, par exemple la force de gravité.

Il est possible de ranger la plupart des forces par famille telles que : Les forces de réaction : chaque corps exerce une force sur un autre corps qui est en contact avec lui. Par exemple, si un objet repose sur une table, cette table exerce une force égale et opposée sur l'objet avec cette force est toujours à la verticale du point de contact.

Les forces de frottement : la force de frottement existe lorsque deux corps sont en contact. Elle s'oppose toujours au mouvement (par exemple : contact des pneus sur la route, freinage, etc.).

Les forces de tension: est une force qui tire sur un élément d'un corps comme par exemple, la tension exercée par un fil ou par un ressort.

Les forces à distance : ce sont les forces qui agissent par l'intermédiaire de champs vectoriels comme par exemple le champ électrique, le champ magnétique, le champ gravitationnel. Ce dernier a comme particularité s'il est isotrope de pouvoir se réduire à l'étude du centre de gravité du corps.

Nous devons donc pouvoir différentier les efforts intérieurs et extérieurs à un système matériel.

2.5. Classification de forces

Il s'agit une classification des forces ou actions mécaniques suivant leur situation par rapport au système matériel.

2.5.1. Les forces externes

Correspondent aux forces qui sont exercées par le milieu extérieur sur le système étudie.

2.5.2. Les forces internes

Correspondent, quant à elles, aux forces exercées par une partie du système sur une autre partie du système. Cette distinction entre forces internes et forces externes dépend du système étudie.

Considérons le système matériel formé par les solides 1 et 2

- ✓ L'action de 3 sue 2 est extérieure à S
- ✓ L'action de 1 sue 2 est extérieure à S

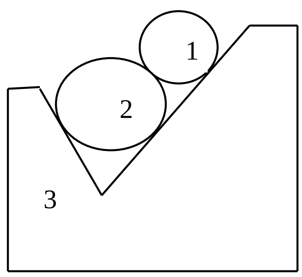


Figure 2.11 : Système matériel.

2.6. Modèles mécaniques

- ✓ Le plus simple est celui **du point matériel.**

La description du solide est réduite à la position de son centre de gravité et à sa masse. Ce modèle est adapté aux cas ou l'on ne s'intéresse qu'aux mouvements du centre de gravité. En particulier, il ne prend en compte ni les rotations propres de l'objet, ni ses déformations.

- ✓ La seconde modèle est le modèle du **solide indéformable.**

Il est bien adapté pour l'étude des mouvements mécanique du solide et des efforts mis en œuvre dynamique tant que les efforts restent modérés. Il permet de prendre en compte les rotations propres.

2.7. Exercices sur les généralités et définitions de base

Exercice N° 01 :

Soient deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ faisant chacune respectivement un angle de 25° et 35° avec la résultante $\vec{R}$ qui a une valeur de 400 N.

- Déterminer les modules des deux forces.

Exercice N° 02 :

La résultante de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ est égale à 50 N et fait un angle de 30° avec la force $F_1 = 15N$.

- Trouver le module de la force $\vec{F}_2$ et l'angle entre les deux forces.

Exercice N° 03 :

La ligne d'action d'une force $\vec{F}$ de 800 N, passe par les points $A\begin{cases}1{,}22\\0\\2{,}74\end{cases}$ et $B\begin{cases}0\\1{,}22\\0{,}61\end{cases}$ dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force

Exercice N° 04 :

Déterminer le moment par rapport à l'origine **O** de la force : $\vec{F} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ appliquée au point **A** pour les cas suivants :

Le vecteur position du point **A** est donné par :

a) $\vec{r}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; **b)** $\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k}$

Déterminer dans les deux cas l'angle que fait la force avec le vecteur position : $\vec{r}$.