Centre Universitaire de Mila **Année universitaire** 2022/2023

Institut des Sciences et de la Technologie **Domaine**: MI-Mathématiques (1^{er}année)

Analyse I

Série d'exercices N°03

Semestre I

Exercice 1:

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes:

$$f(x)=\frac{x^3+3}{1-|x|} \quad ; \quad f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \quad ; \quad f(x)=\ln(4x+3) \quad ; \quad f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin 2x}.$$

Exercice 2:

Etudie la parité (paire ou impaire) des fonctions suivantes:

$$f(x)=\frac{tgx-x}{x^3\cos x} \quad ; \quad g(x)=\frac{\sin^2 2x-\cos 3x}{tgx} \quad ; \quad h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

Exercice 3:

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie par:

$$f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

1- Montrer que f est majorée et minorée sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 4:

Par définition, Montrer que:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2 \quad ; \quad \lim_{x\to 2}(x^2-x+1)=3 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty \ \ (*) \ ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \ \ (*).$$

Exercice 5:

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; 4) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}E(x)$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)^2}{x^4}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$;

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|\sin x|}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 6:

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point x_0. Sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \sin(x+1) \ln|x+1|$, $x_0 = -1$

3) $f(x) = \dfrac{1 - \cos\sqrt{|x|}}{|x|}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x_0 = 0$.

Exercice 7:

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$; et soient λ et μ deux nombres réels strictement positifs. Montrer qu'il existe au moins un nombre $c \in [a, b]$ tel que:

$$\lambda f(a) + \mu f(b) = (\lambda + \mu) f(c).$$

Exercice 8:

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{x} - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ b & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 + x - a & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1- Déterminer les nombres réels a, b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, en particulier au point $x_0 = 0$.

2- Dans ce cas, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 9:

Soit f une fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x < -2 \\ a & \text{si} \quad x = -2 \\ (2x+b)^2 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a, b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.