Exercice 9 trouvez les formes normales disjonctives :

a. $(A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$

b. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

c. $\neg((A \vee B) \to C)$

Exercice 10 Trouvez les formes normales conjonctives :

a. $(A \vee B) \to (C \wedge D)$

b. $(A \vee (\neg B \wedge (C \vee (\neg D \wedge E))))$

c. $A \leftrightarrow (B \wedge \neg C)$

Exercice 11 Montrez que les formules suivantes sont des théorèmes

1. $\vdash x \Rightarrow x \vee x$

2. $\vdash y \vee x \Rightarrow x \vee y$, 3. $\vdash \bar{x} \vee x$, 4. $\vdash x \Rightarrow \bar{\bar{x}}$, 5. $\vdash \bar{\bar{x}} \Rightarrow x$

Exercice 12 Montrez les règles de la dérivation suivante

1. $$\frac{\vdash A \Rightarrow B}{\vdash \bar{B} \Rightarrow \bar{A}}$$

3. $$\frac{\vdash A \wedge B}{\begin{array}{c}\vdash A \\ \vdash B\end{array}}$$

2. $$\frac{\begin{array}{c}\vdash A \\ \vdash B\end{array}}{\vdash A \wedge B}$$

4. $$\frac{\begin{array}{c}\vdash A \Rightarrow C \\ \vdash B \Rightarrow C\end{array}}{\vdash A \vee B \Rightarrow C}$$

5. $$\frac{\begin{array}{c}\vdash A \Rightarrow B \\ \vdash C \Rightarrow D\end{array}}{\vdash A \vee C \Rightarrow B \vee D}$$

Solution série 02

Exercice 1 Solution :

1)

1. Vrai
2. Faux
3. Vrai
4. Vrai
5. Faux

2)

1. Vrai
2. Faux
3. Faux
4. Faux
5. Faux
6. Vrai

3)

1. Vrai
2. Vrai
3. Vrai
4. Vrai
5. Faux
6. Vrai

Exercice 2 Solution :

1) Vrai, 2) Faux, 3) Faux, 4) Vrai.

Exercice 3 Solution :

1) La table de vérité de $\neg(p \wedge q)$ est comme suit

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

2) La table de vérité de $\neg p \vee \neg q$ est comme suit :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

3) La table de vérité de $\neg(p \vee q)$ est comme suit :

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

4) La table de vérité de $\neg p \wedge \neg q$ est comme suit :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

5) La table de vérité de $p \vee (p \wedge q)$ est comme suit :

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

6) La table de vérité de $p \wedge (p \vee q)$ est comme suit :

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

7) La table de vérité de p est comme suit :

p
V
F

Les équivalences sont :
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Exercice 4 Solution :

1) $\neg p \equiv$ Il ne fait pas froid.
2) $p \wedge q \equiv$ Il fait froid et il pleut.
3) $p \vee q \equiv$ Il fait froid ou il pleut.
4) $q \vee \neg p \equiv$ Il pleut ou il ne fait pas froid.
5) $\neg p \wedge \neg q$ Il ne fait pas froid et il ne pleut pas.

6) $\neg\neg q$ Ce n'est pas vrai qu'il ne pleut pas (ou bien on peut mettre "il pleut").

Exercice 5 Solution :

1) Eric lit Match ou l'Express, mais ne lit pas les Echos $\equiv p \vee q \wedge \neg r$.
2) Eric lit Match et l'Express, ou il ne lit ni Match ni les Echos $\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$.
3) Ce n'est pas vrai qu'Eric lit Match mais pas les Echos $\equiv \neg(p \vee \neg r)$.
4) Ce n'est pas vrai qu'Eric lit les Echos ou l'Express mais pas Match $\equiv \neg((r \vee q) \vee \neg p)$.

Exercice 6 Solution :

1) Premièrement, il faut introduire les variables propositionnelles.
"A" : pour " Ahmed commande un dessert ".
"L" : pour " Ali commande un dessert ".
"M" : pour " Mostafa commande un dessert ".

Maintenant, on va transformer les phrases en logique propositionnelle.

1. La phrase 1 donne : $A \longrightarrow L$,
2. La phrase 2 donne : $(L \wedge \neg M) \vee (\neg L \wedge M)$,
3. La phrase 3 donne : $A \vee M$,
4. La phrase 4 donne : $M \longrightarrow A$.

2) Pour voir réellement qui a commandé un dessert, on fait la table de vérité de la formule globale "F_1" composée à partir de la conjonction de toutes les affirmations précédentes dans le but de voir tous les modèles possibles.
La formule globale "F_1" $= (A \longrightarrow L) \wedge ((L \wedge \neg M) \vee (\neg L \wedge M)) \wedge (A \vee M) \wedge (M \longrightarrow A)$.
La table de vérité est alors comme suit :

Interprétations	A	L	M	$A \to L$	$(L \wedge \neg M) \vee (\neg L \wedge M)$	$A \vee M$	$M \to A$	F_1
I_1	V	V	V	V	F	V	V	F
I_2	V	V	F	V	V	V	V	V
I_3	V	F	V	F	V	V	V	F
I_4	V	F	F	F	F	V	V	F
I_5	F	V	V	V	F	V	F	F
I_6	F	V	F	V	V	F	V	F
I_7	F	F	V	V	V	V	F	F
I_2	F	F	F	V	F	F	V	F

La seule interprétation qui rend vraie la formule "F_1" est l'interprétation I_2 dans laquelle Ahmed et Ali commandent un dessert mais pas Mostafa. Car les valeurs de vérité des propositions A et L sont vraies mais la proposition M = faux (dans la ligne deux de la table de vérité).

3) Si on relâche l'une des contraintes précédentes, alors il y' aura toujours un deuxième modèle qui apparait et dans ce cas on pourra pas conclure (pour conclure, il faut toujours avoir un seul modèle pour la formule F_1).

Exercice 7 Solution :

1) La table de vérité de la formule $(p|q)$ est comme suit :

p	q	$(p\|q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

2) La table de vérité de la formule $((p|q)|(p|q))$ est comme suit :

p	q	$(p\|q)$	$((p\|q)\|(p\|q))$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F

On retrouve la table de vérité de $p \wedge q$

3) Le connecteur $\neg$: $\neg p \equiv \neg(p \wedge p) \equiv (p|p)$

On peut donner sa table de vérité :

p	$(p\|p)$
V	F
F	V

- Le connecteur $\vee$: $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg p|\neg q) \equiv (p|p)|(q|q)$.

- Le connecteur $\longrightarrow$: $p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv p|\neg q \equiv p|(q|q)$.

Exercice 8 Solution :

a) La table de vérité de la formule $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee R)$ est comme suit

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee R$	$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee R)$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La formule est valide.

b)La table de vérité de la formule $P \wedge (Q \rightarrow P) \rightarrow P$ est comme suit :

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge (Q \to P)$	$P \wedge (Q \to P) \to P$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

La formule est valide.

c)La table de vérité de la formule $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$ est comme suit :

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

La formule est invérifiable.

d) La table de vérité de la formule $(P \to Q) \wedge (Q \vee R) \wedge P$ est comme suit :

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \vee R$	$(Q \vee R) \wedge P$	$(P \to Q) \wedge (Q \vee R) \wedge P$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F

La formule est vérifiable.

e) La table de vérité de la formule $((P \vee Q) \to R) \leftrightarrow P$ est comme suit :

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \to R$	$((P \vee Q) \to R) \leftrightarrow P$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

La formule est vérifiable.

Exercice 9 Solution :

a) Mettre sous forme normale disjonctive (FND) la formule : $(A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$.

$$(A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$$
$$\equiv (A \wedge (C \vee \neg A)) \vee (B \wedge (C \vee \neg A)) \vee (C \wedge (C \vee \neg A)) \quad \text{La distributivité.}$$

$\equiv ((A\wedge C)\vee(A\wedge\neg A))\vee((B\wedge C)\vee(B\wedge\neg A))\vee((C\wedge C)\vee(C\wedge\neg A))$ La distributivité.
$\equiv (A\wedge C)\vee((B\wedge C)\vee(B\wedge\neg A))\vee(C\vee(C\wedge\neg A))$ On a enlevé $(A\wedge\neg A) = \text{Faux}$ selon la règle d'insatisfiabilité.
$\equiv (A\wedge C)\vee((B\wedge C)\vee(B\wedge\neg A))\vee C$ On a remplacé $(C\vee(C\wedge\neg A))$ par C selon l'absorption.
$\equiv (A\wedge C)\vee(B\wedge C)\vee(B\wedge\neg A)\vee C$

b) Mettre sous forme normale disjonctive (FND) la formule : $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$.

$(A\vee B)\wedge(C\vee D)$
$\equiv (A\wedge(C\vee D))\vee(B\wedge(C\vee D))$ La distributivité.
$\equiv ((A\wedge C)\vee(A\wedge D))\vee((B\wedge C)\vee(B\wedge D))$ La distributivité.
$\equiv (A\wedge C)\vee(A\wedge D)\vee(B\wedge C)\vee(B\wedge D)$

c) Mettre sous forme normale disjonctive (FND) la formule : $\neg((A\vee B)\rightarrow C)$.

$\neg((A\vee B)\rightarrow C)$
$\equiv \neg(\neg(A\vee B)\vee C)$ La transformation de l'implication en disjonction.
$\equiv (A\vee B)\wedge\neg C$ On a distribué le $\neg$.
$\equiv \neg C\wedge(A\vee B)$ La commutativité du $\wedge$.
$\equiv (\neg C\wedge A)\vee(\neg C\wedge B)$ La distributivité.

Exercice 10 Solution :

a) Mettre sous forme normale conjonctive (FNC) la formule : $(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D)$.

$(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D)$
$\equiv \neg(A\vee B)\vee(C\wedge D)$ La transformation de l'implication en disjonction.
$\equiv (\neg A\wedge\neg B)\vee(C\wedge D)$ Loi de Morgan.
$\equiv (\neg A\vee(C\wedge D))\wedge(\neg B\vee(C\wedge D))$ La distributivité.
$\equiv ((\neg A\vee C)\wedge(\neg A\vee D))\wedge((\neg B\vee C)\wedge(\neg B\vee D))$ La distributivité.
$\equiv (\neg A\vee C)\wedge(\neg A\vee D)\wedge(\neg B\vee C)\wedge(\neg B\vee D)$

b) Mettre sous forme normale conjonctive (FNC) la formule : $(A\vee(\neg B\wedge(C\vee(\neg D\wedge E))))$.

$(A\vee(\neg B\wedge(C\vee(\neg D\wedge E))))$
$\equiv (A\vee(\neg B\wedge((C\vee\neg D)\wedge(C\vee E))))$ La distributivité.
$\equiv ((A\vee\neg B)\wedge(A\vee((C\vee\neg D)\wedge(C\vee E))))$ La distributivité.
$\equiv ((A\vee\neg B)\wedge((A\vee C\vee\neg D)\wedge(A\vee C\vee E)))$ La distributivité.
$\equiv (A\vee\neg B)\wedge(A\vee C\vee\neg D)\wedge(A\vee C\vee E)$

c) Mettre sous forme normale conjonctive (FNC) la formule : $A\leftrightarrow(B\wedge\neg C)$.

$A\leftrightarrow(B\wedge\neg C)$
$\equiv (A\rightarrow(B\wedge\neg C))\wedge((B\wedge\neg C)\rightarrow A)$ La transformation de $\leftrightarrow$ en double $\rightarrow$.
$\equiv (\neg A\vee(B\wedge\neg C))\wedge(\neg(B\wedge\neg C)\vee A)$ La transformation de l'implication en disjonction.
$\equiv (\neg A\vee(B\wedge\neg C))\wedge((\neg B\vee C)\vee A)$ Loi de Morgan.
$\equiv ((\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee\neg C))\wedge((\neg B\vee C)\vee A)$ La distributivité.
$\equiv (\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee\neg C)\wedge(\neg B\vee C\vee A)$.

Logique mathématique
Série de TD N°0 02

Exercice 1

1. Soit A la proposition suivante : « Tous les hommes sont barbus ». Cochez les formulations correctes de la proposition $\neg A$.

☐ « Tous les hommes ne sont pas barbus.»
☐ « Aucun homme n'est barbu.»
☐ « Il existe un homme qui n'est pas barbu.»
☐ « Il existe au moins un homme qui n'est pas barbu.»
☐ « Il n'existe qu'un seul homme qui n'est pas barbu.»

2. Voici une liste de propositions A et B simples, dont vous connaissez la valeur de vérité. Dans chaque cas, exprimez la valeur de vérité de la proposition $A \wedge B$.

V F
☐ ☐ A : « Paris est la capitale de la France.» et B : « $1+1=2$».
☐ ☐ A : « Un chat a cinq pattes.» et B : « Un carré a quatre cotés.».
☐ ☐ A : « Un triangle rectangle a un angle droit.» et B : « Deux droites parallèles se coupe en un point.».
☐ ☐ A : « $3 * 8 = 32$» et B : « Paris est la capitale de la France.».
☐ ☐ A : « Berlin est la capitale de l'Espagne.» et B : « Un triangle rectangle a trois cotés égaux.».
☐ ☐ A : « Une mouche sait voler.» et B : « Le canada est un pays du continent américain.».

3. Voici une liste de propositions A et B simples, dont vous connaissez la valeur de vérité. dans chaque cas, exprimez la valeur de vérité de la proposition $A \vee B$.

V F
☐ ☐ A : « Paris est la capitale de la France.» et B : « $1+1=2$».
☐ ☐ A : « Un chat a cinq pattes.» et B : « Un carré a quatre cotés.».
☐ ☐ A : « Un triangle rectangle a un angle droit.» et B : « Deux droites parallèles se coupe en un point.».
☐ ☐ A : « $3 * 8 = 32$» et B : « Paris est la capitale de la France.».
☐ ☐ A : « Berlin est la capitale de l'Espagne.» et B : « Un triangle rectangle a trois cotés égaux.».
☐ ☐ A : « Une mouche sait voler.» et B : « Le canada est un pays du continent américain.».

Exercice 2 Les expressions suivantes sont elles des formules bien formées ?

1. $p \wedge \neg q$, 2. $p \vee \vee r$, 3. $(p \vee (\neg p))$, 4. $(p \vee \neg p)$.

Exercice 3 Donnez les tables de vérités des formules suivantes. puis indiquez les équivalences entre ces formules.

1. $\neg(p \wedge q)$, 2. $\neg p \vee \neg q$, 3. $\neg(p \vee q)$, 4. $\neg p \wedge \neg q$, 5. $p \vee (p \wedge q)$, 6. $p \wedge (p \vee q)$, 7. p

Exercice 4 Soient p et q deux variables propositionnelles signifiant respectivement « il fait froid » et « il pleut ». Écrire une phrase simple correspondant à chacun des énoncés suivants :
1. $\neg p$, 2. $p \wedge q$, 3. $p \vee q$, 4. $q \vee \neg p$, 5. $\neg p \wedge \neg q$, 6. $\neg\neg q$

Exercice 5 Soient p : « Eric lit Match » , q : « Eric lit l'Express » et r : « Eric lit les Echos ».
Donnez une formule logique pour chacune des phrases suivantes :
1. Eric lit Match ou l'Express, mais ne lit pas les Echos ».
2. Eric lit Match et l'Express, ou il ne lit ni Match ni les Echos.
3. Ce n'est pas vrai qu'eric lit Match mais pas les Echos.
4. Ce n'est pas vrai qu'Eric lit les Echos ou l'Express mais pas Match.

Exercice 6 Énigme.Trois collègues Ahmed, Ali et mostafa déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Ahmed commande un dessert, Ali en commande un aussi,
2. Chaque jour, soit Mostafa, soit Ali, mais pas les deux, commandent un dessert,
3. Ahmed ou Mostafa, ou les deux, commandent chaque jour un dessert,
4. Si Mostafa commande un dessert, Ahmed fait de même.

Questions :

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles.
2. Que peut on déduire sur qui commande un dessert ?
3. Est ce qu'on peut arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Exercice 7 Connecteur de Sheffer. On définit le connecteur de Sheffeur noté $\uparrow$ (barre de Sheffer) qui est le NAND par $p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$.
1. Donner la table de vérité de la formule $(p \uparrow q)$.
2. Donner la table de vérité de la formule $((p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q))$.
3. Exprimer les connecteurs $\neg$, $\vee$ et $\Rightarrow$ en utilisant la barre de Sheffer.

Exercice 8 Établir les tables de vérité des formules suivantes et dites si elles sont valides, vérifiables ou invérifiables :

a. $(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\neg P \vee R)$
b. $P \wedge (Q \Rightarrow P) \Rightarrow P$
c. $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
d. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \vee R) \wedge P$
e. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow P$