Exercice 06 :

Démontrer que : 1) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow Q)$

$$\boxed{\begin{array}{l} P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \\ P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \end{array}}$$

$(\overline{P} \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{\overline{P}} \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$.

2) $P \Leftrightarrow [(Q \Rightarrow P) \wedge (\overline{Q} \Rightarrow P)]$?

$[(Q \Rightarrow P) \wedge (\overline{Q} \Rightarrow P)] \Leftrightarrow [(\overline{Q} \vee P) \wedge (\overline{\overline{Q}} \vee P)]$

$\Leftrightarrow [(\overline{Q} \vee P) \wedge (Q \vee P)] \Leftrightarrow ((\overline{Q} \vee P) \wedge Q) \vee \underbrace{((\overline{Q} \vee P) \wedge P)}_{P}$

$\Leftrightarrow ((\overline{Q} \vee P) \wedge Q) \vee P$

$\Leftrightarrow (\overline{Q} \vee P) \vee P \wedge (\overline{Q} \vee P) \vee P$

$\Leftrightarrow ((Q \wedge P) \vee (Q \wedge \overline{Q})) \vee P$

$\Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee P \Leftrightarrow P$.

Exercice 07 :

1) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \neq P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$?

$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q) \Rightarrow R \Leftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q}) \vee R$

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow P \Rightarrow (\overline{Q} \vee R) \Leftrightarrow \overline{P} \vee (\overline{Q} \vee R)$

$\Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \vee R$.

alors l'implication n'est pas associative.

2) n est pair ssi (si et seulement si) n+1 est impaire

(n est pair $\Leftrightarrow$ (n+1) est impaire)

$\Rightarrow$) ?

n est paire $\Leftrightarrow n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n+1 = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n+1$ impaire

$\Leftarrow$) ? $n+1$ impaire $\Rightarrow n+1 = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n = 2k+1-1$

$= 2k$

$\Rightarrow$ n pair

Centre universitaire abdelhafid boussouf Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
2ème Année maths (Logique mathématique)

Série de TD N° 01

Exercice 1

Soient les quatre assertions suivantes :

a) $\exists x \in \mathbb{R}^{-} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0,$
b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0,$
c) $\exists x \in \mathbb{R}^{-} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x,$
~~d)~~ $\cancel{\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x}.$

- Les assertions a, b, c et d sont-elles vraies ou fausses ?
- Donnez leurs négations.

Exercice 2

Soient les propositions suivantes :

P : Omar est fort en maths,

Q : Omar est fort en chimie.

Ecrire les formules à l'aide des propositions définies ci-dessus, des connecteurs et des parenthèses.

1) Omar est fort en maths mais faible en chimie.

2) Omar n'est pas fort ni en maths ni en chimie.

3) Omar est fort en maths ou il est à la fois fort en chimie et faible en maths.

4) Omar est fort en maths s'il est fort en chimie.

5) Omar est fort en chimie et en maths ou il est fort en chimie et faible en maths.

Exercice 3

En utilisant la table de vérité, démontrez que

$$\overline{P\vee Q} \Leftrightarrow \left(\overline{P}\wedge\overline{Q}\right);\ \overline{P\wedge Q} \Leftrightarrow \left(\overline{P}\vee\overline{Q}\right);\ \left((P\wedge Q)\vee R\right) \Leftrightarrow \left((P\vee R)\wedge(Q\vee R)\right),$$

Exercice 4

Evaluer les formules suivantes en considérant uniquement les valeurs des variables données

$P\vee(Q\Rightarrow R)$, avec $Q=F$; $(Q\Rightarrow P)\Rightarrow R$, avec $Q=F$; $P\wedge(P\vee Q)$, avec $Q=V$;
$P\Rightarrow(P\Rightarrow Q)$, avec $Q=V$.

Exercice 5

Donner la négation de l'expression suivante (sous une forme la plus simple possible) :

$$\big(Q\Rightarrow(P\wedge R)\big)\Rightarrow(P\Rightarrow Q).$$

Exercice 6

Démontrer (sans utiliser la table de vérité) les deux relations suivantes :

$$(P\vee Q)\Leftrightarrow(\overline{P}\Rightarrow Q),\quad P\Leftrightarrow\left[(Q\Rightarrow P)\wedge(\overline{Q}\Rightarrow P)\right].$$

Exercice 7

1) Montrer que l'implication n'est pas associative.

2) Montrer que: n est pair ssi $n+1$ est impair.

Exercice 8

1)Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

a. f n'est pas nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
b. Le dénominateur D de la fraction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
c. f n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
d. f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

2)

a. Montrer que la fonction sin n'est pas nulle.
b. Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
c. Montrer que : $\exists x\in\mathbb{R},\quad \sin x=x$.

Exercice 9

Montrezen utilisant les différents types de raisonnements les propositions suivantes :

- $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- x^2 est impair alors x est impair.
- pour tout entier naturel n non nul : $(1+2+\ldots+n)^2=1^3+2^3+\ldots+n^3$
- l'ensemble des nombres premiers est infini.
- $\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\mathbb{R}\quad x^2+y^2\geq 0.$

Solutions des exercices :

a) Faux, (Exemple : si $x = -3$, $y = 1$)

b) Vraie (" si $\forall x = ?$, $y = -x+1$, $x + y = 1 > 0$)

d) Vraie (" $\exists x = -1$, $\forall y \in \mathbb{R} : y^2 > -1$)

• La négation :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$. Vraie

b) $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ Faux.

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x$ Faux.

Exercice 2 :

1) $(P \wedge \overline{Q})$, 2) $(\overline{P} \wedge \overline{Q})$

3) $(P \vee (Q \wedge \overline{P}))$, 4) $Q \Rightarrow P$

5) $((Q \wedge P) \vee (Q \wedge \overline{P}))$

Exercice 3 :

démontrez que : $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

P	Q	$P\vee Q$	$\overline{P\vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}\wedge\overline{Q}$
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

même chose pour les autres.

Exe 04 : Les quantificateurs (écrire $\exists$ et $\forall$)

a) $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$

c) $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq x$
(f identité $\Leftrightarrow f(x) = x$, $\forall x \in$

d) f n'est pas croissante

$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \leq x_2$
$\wedge\ f(x_1) > f(x_2)$

[f croissante $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f($

Exercice 05 :

Remarque : La négation de l'implication :

$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$ et $\boxed{(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)}$

donc : $S = \overline{(Q \Rightarrow (P \wedge R)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)}$

$= (Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge \overline{(P \Rightarrow Q)}$

$= (Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge (P \wedge \overline{Q}) = (\overline{Q} \vee (P \wedge R)) \wedge (P \wedge \overline{Q})$