Notions de base de la théorie des graphes

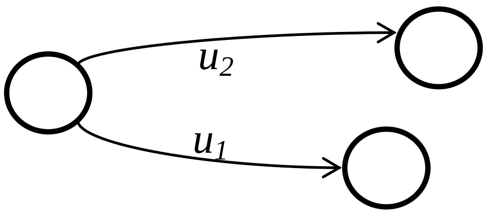
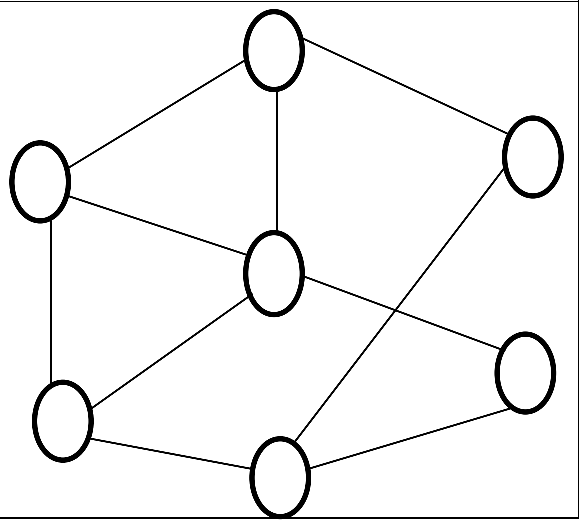
I. Concepts fondamentaux

1) Définition d’un Graphe

- Un graphe **G** est un ensemble de sommets (ou nœuds) qui sont reliés entre eux par des arcs (ou arrêtes).
- Un graphe contient deux informations :
  - l’information donnée par les sommets.
  - l’information donnée par les arcs entre les sommets.
- Mathématiquement, Un graphe simple **G** est un couple formé de deux ensembles :

  G = (X; U) où :
  - $X = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \}$ est l’ensemble des sommets
  - $U = \{ u_1, u_2, u_3, \dots, u_m \}$ l’ensemble des arcs.

Exemples d’un graphe : Soit G un graphe défini par :

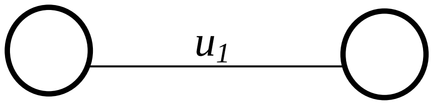
Représentation Mathématique	Représentation Graphique
• $X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ • $U = \{ u_1, u_2 \}$ où $u_1 = (x_1 , x_2), u_2 = (x_1, x_3)$	
• $X = \{ a , b , c , d , f , g \}$ • $U = \{ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10} \}$ où $u_1 = (a , b), u_2 = (a , f),$ $u_3 = (a , g), u_4 = (b , c),$ $u_5 = (b, g), u_6 = (c , e),$ $u_7 = (d , e), u_8 = (d , g),$ $u_9 = (e , f), u_{10} = (f , g)$	

2) L'Arc et L’arrête

Une arête u_1 du graphe est une paire $u_1 = (x_1 , x_2)$ de sommets.

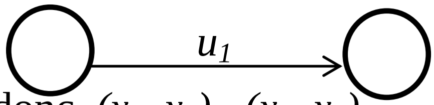
Les sommets x_1 , x_2 sont les extrémités de l'arête (Une arrête relie deux sommets entre eux).

On parle de l'arc si un élément x_1 peut être en relation avec un autre x_2 sans que x_2 soit nécessairement en relation avec x_1



- ***u_1* est une arrête** :

l'ordre de x_1 *et* x_2 n'est pas important dans le couple (x_1 , x_2) donc, $(x_1 , x_2) = (x_2 , x_1)$

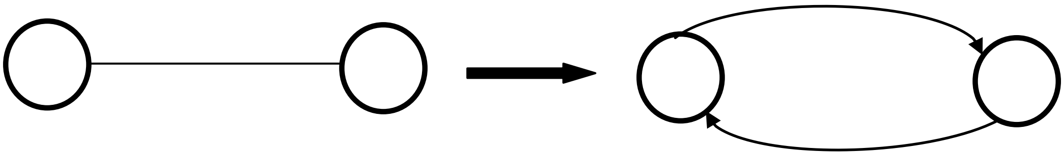


- ***u_1* est un Arc** (arête orientée) :

l'ordre de x_1 *et* x_2 est important dans le couple (x_1 , x_2) , donc, $(x_1 , x_2) \neq (x_2 , x_1)$

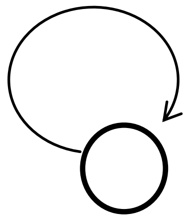
Remarque

- Une arête peut toujours être transformée à une situation où l'on n'a que des arcs orientés.



- Pour un arc $u = (x_i, x_j)$, x_i est l'extrémité initiale, x_j l'extrémité finale (ou bien l'origine et la destination). L'arc u parte de x_i et arrive à x_j .

3) Boucle



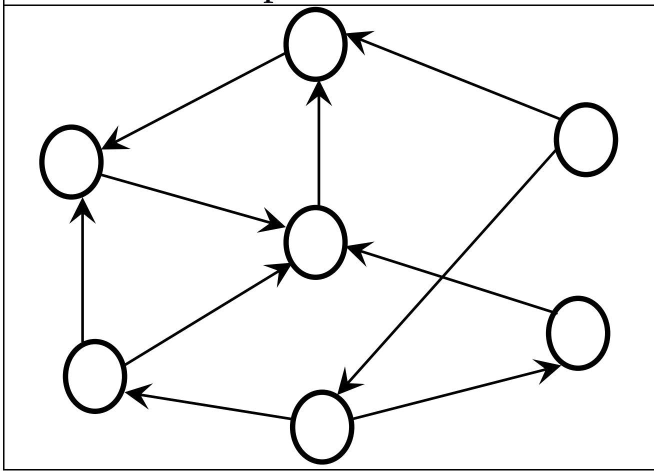
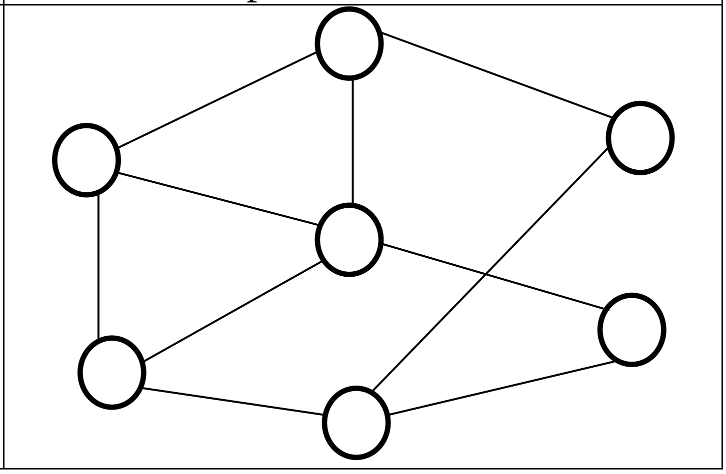
On appelle boucle : un arc dont l'extrémité initiale est égale à son extrémité finale. Par exemple : (x , x) est une boucle.

4) Graphe Orienté et Graphe Non Orienté

Dans un graphe ***non orienté***, la paire de sommets (x_1 , x_2) représente une arête (n'est pas orientée. Autrement dit, (x_1 , x_2) *et* (x_2 , x_1) représentent la même arête).

Dans un graphe ***orienté***, la paire de sommets (x_1 , x_2) représente un arc .
(arête orientée. Autrement dit, (x_1 , x_2) *et* (x_2 , x_1) représentent deux arcs différents).

La figure ci-dessous représente deux graphes :

Graphe ***orienté***	Graphe ***non orienté***
	

II. Représentations d'un graphe

Un certain nombre de représentations existent pour décrire un graphe, On distingue principalement la représentation par :

- Matrice d'adjacence sommets - sommets,
- Matrice d'incidence sommets-arcs (ou sommets-arêtes dans le cas non orienté),
- Listes d'adjacence.

1) Matrice d'adjacence sommets - sommets

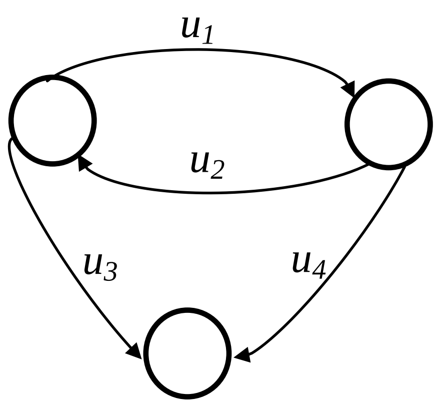
Un graphe peut être représenté par une matrice *n x n* (Chaque ligne et chaque colonne de la matrice représente un sommet, $n = |X|$ = nombre de sommets), dite d'adjacence, pouvant contenir uniquement les valeurs 0, 1.

Une case de la matrice indique la relation qu'il existe entre les deux sommets.

- 0 : les deux sommets ne sont pas reliés par un arc,
- 1 : les deux sommets sont reliés par un arc.

Exemple :

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	1	1
x_2	1	0	1
x_3	0	0	0



Remarque :

- Place mémoire utilisée : n^2 pour un graphe d'ordre n = | X |,

2) Matrice d'incidence nœud-arc

Un graphe peut être représenté par une matrice *n x m*, dite d'incidence,

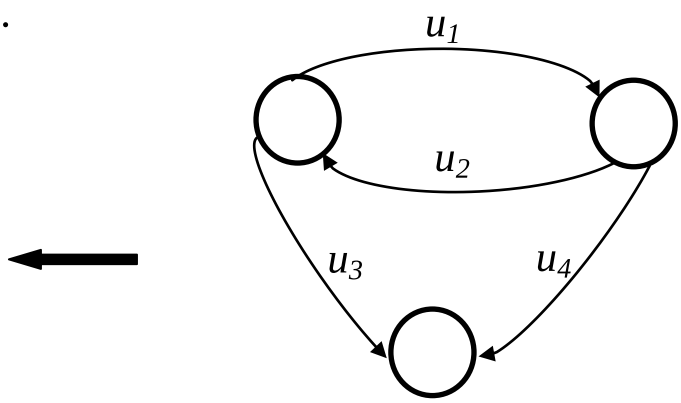
- Chaque ligne de la matrice représente un sommet, $n = |X|$ = nombre de sommets,
- Chaque colonne de la matrice représente un arc, $m = |U|$ = nombre d'arcs,

Cette matrice peut contenir uniquement les valeurs 0, 1, -1. Une case indique la relation qu'il existe entre un nœud et un arc.

- 1 : le sommet est l'extrémité initiale de l'arc,
- -1 : le sommet est l'extrémité finale de l'arc.
- 0 : tous les autres cases sont nulles.

Exemple :

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	1	-1	1	0
x_2	-1	1	0	1
x_3	0	0	-1	-1



Remarques

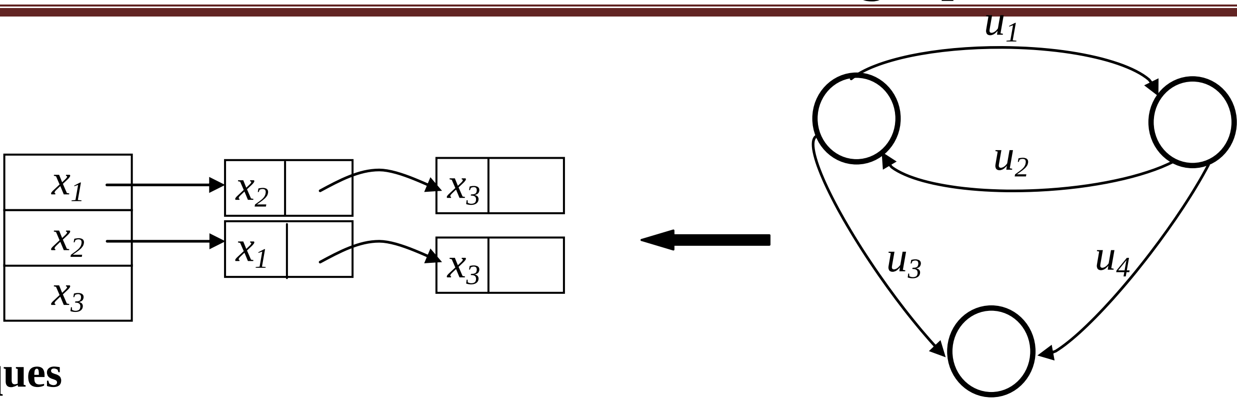
- Place mémoire utilisée : $n \times m$,
- la somme de chaque colonne est égale à 0 (un arc a une origine et une destination).
- Si le graphe est non orienté, le coefficient de la matrice d'incidence en ligne i et en colonne j vaut :

  1 : si le sommet est une extrémité de l'arête
  2 : si l'arête est une boucle
  0 : sinon

3) Listes d'adjacences

On utilise un tableau à *n* cases de pointeurs, chaque case i pointant vers la liste chaînée des sommets sortants.

Exemple :



Remarques

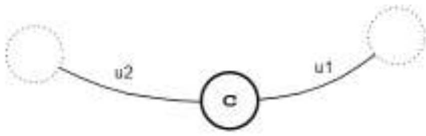
- Cette représentation est nettement plus efficace au niveau de la mémoire occupée par les deux représentations précédentes, parce qu'on ne code que les arcs réellement présents dans le graph.

III. Définitions principales:

1) Adjacence

- Deux sommets sont adjacents (ou voisins) s'ils sont reliés par une arête.

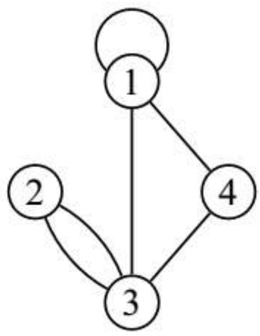
- Deux arcs sont adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune.



2) Graphe Simple et Multigraphe

- Un graphe est *simple* si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.
- On appelle un *Multigraphe* si plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets ou contient des boucles.

  Exemple d'un Multigraphe:

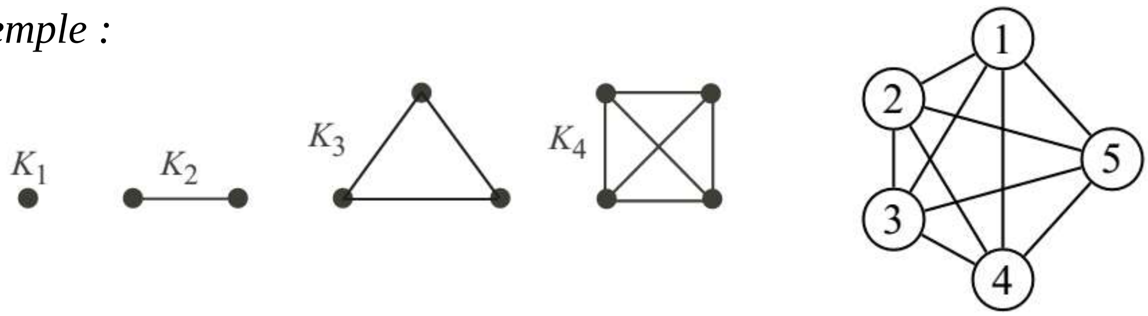


3) Graphe Complet

Un graphe est dit complet si tous ses sommets sont adjacents deux à deux (chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres).

Un graphe complet de n sommets est noté : K_n

Exemple :



K_5

4) Applications multivoques

Soit $G = (X , U)$ un graphe orienté , **Γ** est appelée une application multivoque

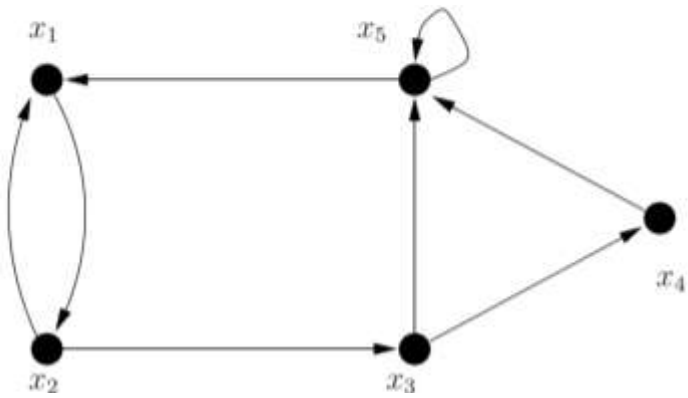
Si $u = (x_i , x_j)$ Alors :

- x_i est le prédécesseur de x_j
- x_j est le successeur de x_i

L'ensemble des successeurs de x_i est noté $\Gamma^{+1}(x_i)$

L'ensemble des prédécesseurs de x_i est noté $\Gamma^{-1}(x_i)$

Exemple : $X=\{ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \}$



$\Gamma^{+1}(x_1) =\{ x_2\}$; $\Gamma^{-1}(x_1)=\{ x_2 , x_5 \}$;

$\Gamma^{+1}(x_5) =\{ x_1 , x_5 \}$; $\Gamma^{-1}(x_5)=\{ x_3 , x_4 , x_5 \}$;

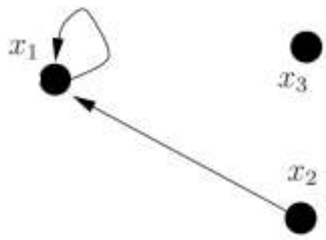
5) Degré d'un sommet :

- $d^+(x_i)$: Le demi-degré extérieur d'un sommet x_i : est le nombre d'arcs ayant x_i comme extrémité initiale. $d^+(x_i) = |\{u \in U\}|$, $u = (x_i , x_j)$ où $x_j \in X$
- $d^-(x_i)$: Le demi-degré intérieur d'un sommet x_i : est le nombre d'arcs ayant x_i comme extrémité finale. $d^-(x_i) = |\{u \in U\}|$, $u = (x_j , x_i)$ où $x_j \in X$
- $d(x_i)$: Le degré d'un sommet x_i : $d(x_i) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$

  Exemple :

$d^+(x_2) = 2$, $d^-(x_2) = 1$, $d(x_2) = 3$
$d^+(x_5) = 2$, $d^-(x_5) = 3$, $d(x_5) = 5$,

6) Le sommet isolé :



Le sommet est un sommet dont le degré est égal à 0.

$d(x_3) = 0$ alors le sommet x_3 est un sommet isolé.

7) Degré d'un Graphe :

Le degré d'un graphe est *le degré* maximum de tous ses sommets.

8) L'ordre d'un Graphe :

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

IV. Sous-Graphe, Graphe Partiel, Sous-Graphe Partiel

1) Le Sous Graphe :

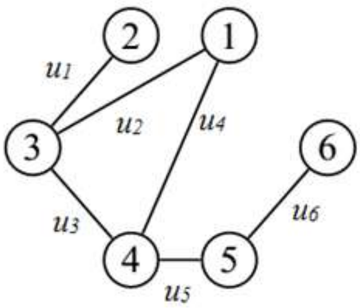
On obtient le ***Sous Graphe*** G_s en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G, ainsi que toutes les arêtes incidentes aux sommets enlevés.

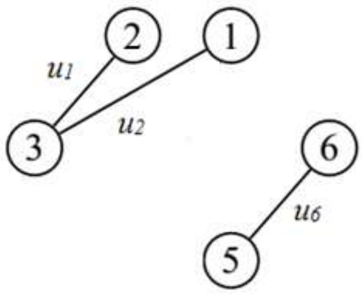
Soit un graphe $G = (X, U)$:

- X' inclus dans X ➔ $X' \subset X$
- $U'' = \{ (x_i, x_j) \mid x_i \in X' \text{ et } x_j \in X' \}$.

➢ Le graphe $G_s = (X', U'')$ est appelé « ***Sous-Graphe*** » de G

Exemple :





Graphe $G = (X, U)$:	Graphe $G_s = (X', U'')$:
$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$X' = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$	$U'' = \{u_1, u_2, u_6\}$

L'enlèvement du sommet ***4*** provoque l'enlèvement de $\{ u_3, u_4 \text{ et } u_5 \}$

2) <u>Le Graphe Partiel :</u>

On obtient le ***Graphe Partiel*** G_p en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G.

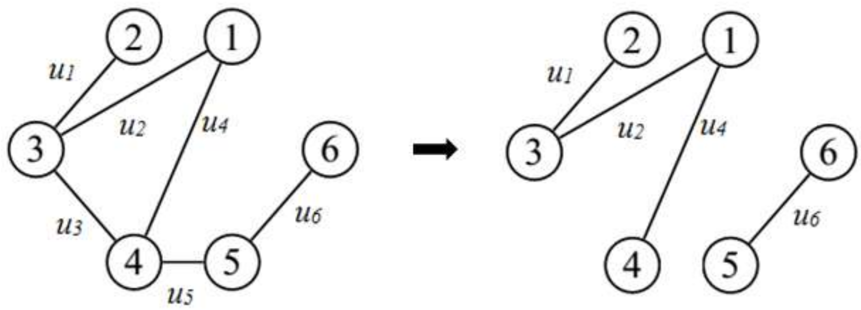
Soit un graphe $G = (X, U)$:

- U' inclus dans U ➔ $U' \subset U$

➢ Le graphe $G_p = (X\ ,\ U')$ est appelé « ***Graphe Partiel*** » de G

Exemple :

L'enlèvement des arêtes { u_3 et u_5 }



Graphe $G = (X\ ,\ U)$:	Graphe $G_p = (X\ ,\ U')$:
$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$	$U' = \{u_1, u_2, u_4, u_6\}$

3) Le Sous Graphe Partiel :

Un ***Sous Graphe Partiel*** $\boldsymbol{G_{sp}}$ est un *Graphe partiel* d'un *Sous-Graphe*

Soit un graphe $G = (X\ ,\ U)$:

- X' inclus dans X ➔ $X' \subset X$
- U' inclus dans U ➔ $U' \subset U$ *(les arrêtes de Gp)*
- $U'' = \{\ (x_i\ ,\ x_j)\ \mid\ x_i \in X'$ et $x_j \in X'\ \}$ *(les arrêtes de Gs)*

➢ Le graphe $G_{sp} = (X'\ ,\ U' \cap U'')$ est appelé « ***Sous-Graphe Partiel*** » de G

Exemple:

▪ Chercher le sous-graphe partiel $\boldsymbol{G_{sp}}$ en enlevant le nœud 5 et les arêtes $\{u_2, u_5\}$

a. Enlever sommet 5 → (sous-graphe)

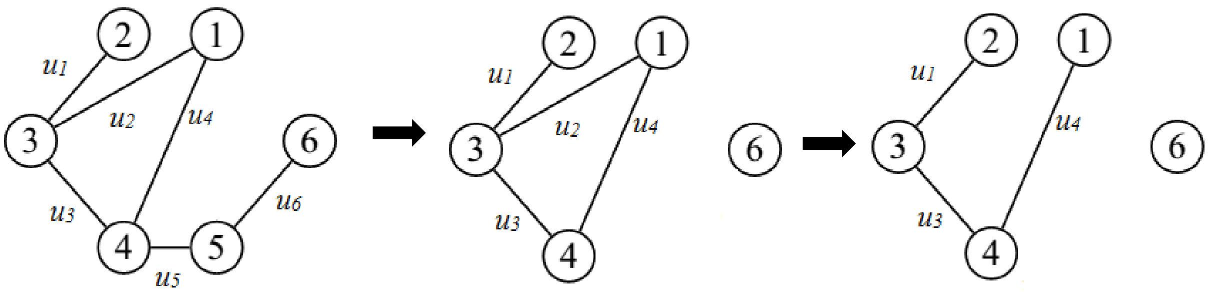
   $X' = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ et $U'' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

b. Enlever les arêtes $\{\ u_2, u_5\ \}$ → (graphe partiel)

   $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $U' = U - \{u_2, u_5\} = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}$

c. Le Résultat → un sous-graphe partiel $G_{sp} = (X'\ ,\ U' \cap U'')$

Notions de base de la théorie des graphes



Graphe $G = (X, U)$:	Graphe $G_s = (X', U'')$:	Graphe $G_{sp} = (X', U' \cap U'')$:
$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$X' = \{1, 2, 3, 4, 6\}$	$X' = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$	$U'' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$	$U' \cap U'' = \{u_1, u_3, u_4\}$

V. Chaîne, chemin, Circuit et Cycle

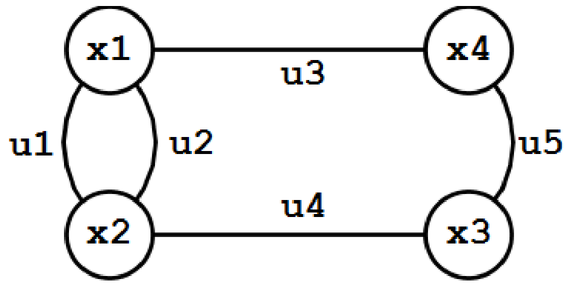
1) Chaîne

Dans un graphe *Non Orienté* : ***Une Chaîne*** est une <u>suite continue</u> d'arêtes reliant deux sommets du graphe.

2) Cycle

Dans un graphe : ***Un Cycle*** est une chaîne qui :

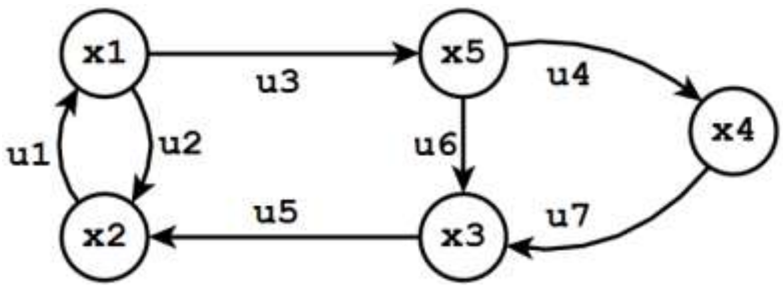
- Contient au moins une arête,
- Toutes les arêtes de la séquence sont différentes,
- Les extrémités de la chaîne coïncident.



➢ *Exemples dans un graphe non orienté* :

- $\{u_3, u_5\} = \{ (x_1, x_4) ; (x_4, x_3) \}$ c'est une chaine de x_1 *à* x_3
- $\{u_1, u_4\} = \{ (x_1, x_2) ; (x_2, x_3) \}$ c'est une chaine de x_1 *à* x_3
- $\{u_3, u_5, u_4\} = \{ (x_1, x_4) ; (x_4, x_3) ; (x_3, x_2) \}$ c'est une chaine de x_1 *à* x_2
- $\{u_3, u_4\} = \{ (x_1, x_4) ; (x_2, x_3))\}$ n'est pas une chaine.
- $\{u_1, u_2\} = \{ (x_1, x_2) ; (x_2, x_1) \}$ c'est un cycle
- $\{u_3, u_5, u_4, u_2\} = \{ (x_1, x_4) ; (x_4, x_3) ; (x_3, x_2) ; (x_2, x_1) \}$ c'est un cycle

- *Exemples dans un graphe orienté* :



- $\{u_2, u_5, u_6, u_4\} =$

$\{(x_1, x_2) ; (x_2, x_3) ; (x_3, x_5) ; (x_5, x_4)\}$
c'est une chaine de x_1 *à* x_4

- $\{u_4, u_7, u_6\} =$

$\{ (x_5, x_4) ; (x_4, x_3) ; (x_3, x_5) \}$ c'est un cycle.

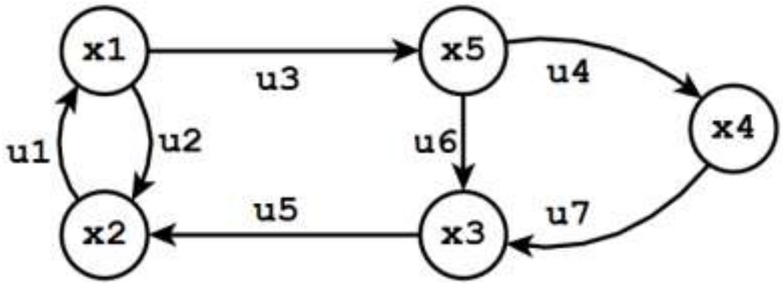
3) Chemin (*même définition de la chaîne mais en considérant le concept d'orientation*)

Dans un graphe *Orienté*, ***Un Chemin*** est une suite continue d'arcs. Où l'extrémité finale d'un arc est l'extrémité initiale du suivant.

4) Circuit (*même définition du cycle mais en considérant le concept d'orientation*)

Dans un graphe orienté, ***Un Circuit*** est un chemin qui

- Contient au moins un arc,
- Tous les arcs de la séquence sont différents,
- Les extrémités du chemin coïncident.



➢ *Exemples dans un graphe orienté* :

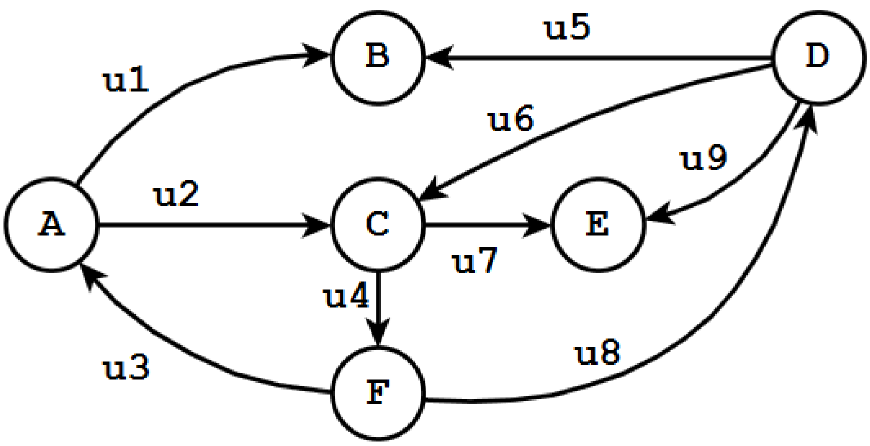
- $\{u_1, u_3, u_4, u_7\}$ = $\{(x_2, x_1) ; (x_1, x_5) ; (x_5, x_4) ; (x_4, x_3)\}$
C'est un chemin de x_2 *à* x_3
- $\{u_1, u_3, u_6, u_5\}$ = $\{(x_2, x_1) ; (x_1, x_5) ; (x_5, x_3) ; (x_3, x_2)\}$ C'est un circuit.

❖ ***Remarques***

- L'extrémité *initiale* de la chaîne est l'extrémité initiale de la première arête.
- L'extrémité *finale* de la chaîne est l'extrémité finale de la dernière arête.
- Un circuit ou un cycle est une séquence circulaire, donc il n y a pas d'extrémité *initiale* ou *finale*.

5) Chemin, Chaîne simples

- Un chemin simple est un chemin qui ne contient pas plusieurs fois le même arc.
- Une chaîne simple est une chaîne qui ne contient pas plusieurs fois le même arc ou arête.



- $ch_1 = \{u_2, u_7\}$ = $\{(A, C) ; (C, E)\}$
Un chemin de **A** à **E**
- $ch_2 = \{u_2, u_4, u_3, u_2, u_7\}$ = $\{(A,C);(C,F);(F,A);(A,C);(C,E)\}$
Un chemin de **A** à **E**

- ch_3 ={u_2 , u_4 , u_8 , u_9 } =
  { (A , C) ; (C , F) ; (F , D) ; (D , E) } Un chemin de **A** à **E**

  ch$_1$ et **ch$_3$** sont des **chemins simples** mais pas **ch$_2$**

ch$_4$ = **{ u_1 , u_5 , u_9 } = { (A , B) ; (B , D) ; (D , E) }** Une chaine de **A** à **E**.
ch$_5$ = **{ u_1 , u_5 , u_6 , u_2 , u_1 , u_5 , u_9 }** = **{ (A , B) ; (B , D) ; (D , C) ; (C , A) ; (A , B) ; (B , D) ; (D , E) }** une chaine de **A** à **E**.
ch$_6$ = **{ u_1 , u_5 , u_6 , u_4 , u_8 , u_9 }** = **{ (A , B) ; (B , D) ; (D , C) ; (C , F) ; (F , D) ; (D , E)}** Une chaine de **A** à **E**.

ch$_4$ et ***ch$_6$*** sont des **chaînes simples** mais pas ***ch$_5$***

6) Chemin, Chaîne élémentaires

- *Chaîne élémentaire* est une chaîne qui ne passe pas plus d'une fois par un nœud.
  ch$_4$ est une *chaîne élémentaire* mais pas ***ch$_5$***, ni ***ch$_6$***.
- *Chemin élémentaire* est un chemin qui ne passe pas plus d'une fois par un nœud.
  ch$_1$ et ***ch$_3$*** sont des *chemins élémentaires* mais pas ***ch$_2$***.

7) Cycle, Circuit élémentaires

- *Cycle est élémentaire* si la chaîne associée est élémentaire.
- *Circuit est élémentaire* si le chemin associé est élémentaire.

8) La longueur d'une chaîne (chemin)

- La longueur d'une chaîne (chemin) est le nombre d'arcs /arêtes qui la constituent
  ch$_1$ (longueur = 2), ***ch$_2$*** (longueur = 5), ***ch$_5$*** (longueur = 7).

VI. Connexité, Forte Connexité

On définit la relation de connexité entre deux sommets (x_i, x_j) de la manière suivante :

- (x_i , x_j) ont une relation de ***connexité*** si : Il existe une chaîne entre x_i et x_j
- (x_i , x_j) ont une relation de ***forte connexité*** si : Il existe un chemin de x_i à x_j et un chemin de x_j à x_i

VII. Graphe *Connexe* et Graphe *Fortement Connexe*

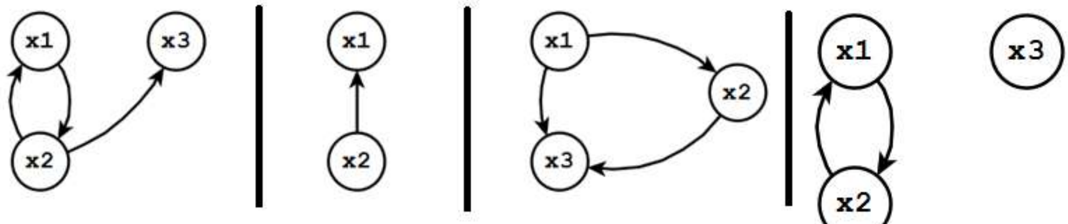
- Un graphe est ***connexe*** si tous ses sommets ont deux à deux la relation de connexité. Mathématiquement : Un graphe $G = (X , U)$ est connexe si :

  $\forall\ x_i , x_j \in X$, il existe ***une chaîne*** entre x_i et x_j

- Un graphe est ***fortement connexe*** si tous ses sommets ont deux à deux la relation de forte connexité. Mathématiquement : Un graphe G est fortement connexe si :

  $\forall\ x_i , x_j \in X$, il existe ***un chemin*** entre x_i et x_j et ***un chemin*** entre x_j et x_i

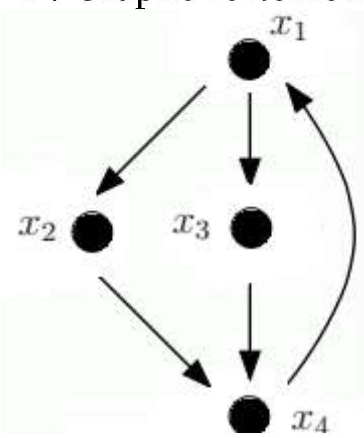
  ➢ *Exemples :*

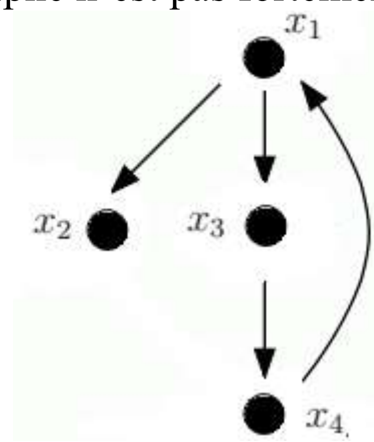


G1 *G2* *G3* *G4*

G1, G2, G3 : sont des graphes connexes, mais pas G4 n'est pas connexe par ce qu'il n y a aucune chaîne entre x_1 et x_3 ou entre x_2 et x_3

1 : Graphe fortement connexe   2 : Graphe n'est pas fortement connexe





Le graphe 2 : il n y a aucun chemin de x_2 à x_4 ➔ donc: n'est pas fortement connexe

VIII. Composante *Connexe* et Composante *Fortement Connexe*

1) La Composante Connexe :

On appelle ***composante connexe*** le sous-ensemble de sommets tels que : entre deux sommets quelconques, il existe une chaîne.

Exemple : soit un graphe $G = (X, U)$

$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \}$

$U = \{ (x_1, x_2) ; (x_2, x_1) ; (x_4, x_1) ; (x_5, x_7) ; (x_3, x_8) ; (x_3, x_6) ; (x_8, x_6) \}$

Le Graphe G contient 3 composantes connexes :

a. ***C1 = (X1, U1)***

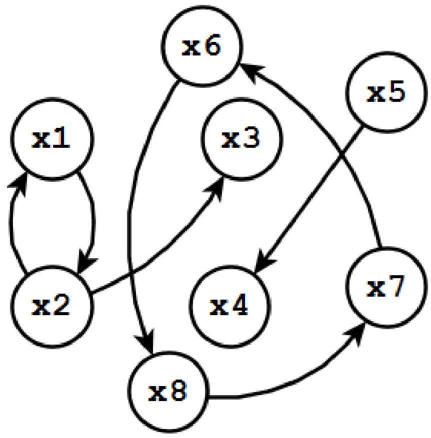
X1={ x_1 , x_2 , x_3 } *U1* = { (x_1 , x_2) ; (x_2 , x_1) ; (x_2 , x_3) }

b. ***C2 = (X2, U2)***

X2 = { x_5 , x_4 } *U2* = { (x_5 , x_4) }

c. ***C3 = (X3, U3)***

X3 = { x_6 , x_7, x_8 } *U3* = {(x_6 , x_8) ; (x_8 , x_7) ; (x_7 , x_6) }



Remarque :

- Un graphe est *connexe* s'il comporte une *composante connexe maximale* et une seule.
- Chaque composante connexe est un graphe connexe.
- Tout nœud en dehors de la composante n'a pas de relation de *connexité* avec aucun des éléments de la composante.

2) <u>La Composante fortement Connexe :</u>

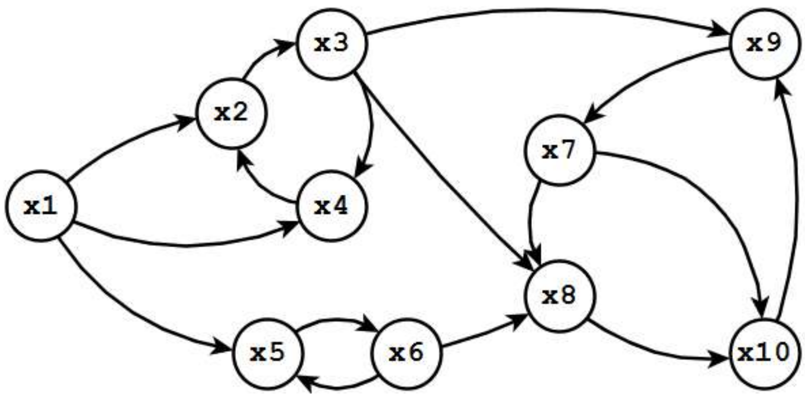
De même, ***Une composante fortement connexe*** est un sous-ensemble de sommets tel qu'il existe un chemin entre deux sommets quelconques.

Dans l'exemple précédent : il existe une seule composante fortement connexe : ***C3***

❖ ***Remarques :***

- Un graphe est fortement connexe s'il comporte une seule composante fortement connexe maximale.
- Tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de forte connexité avec aucun des éléments de la composante.

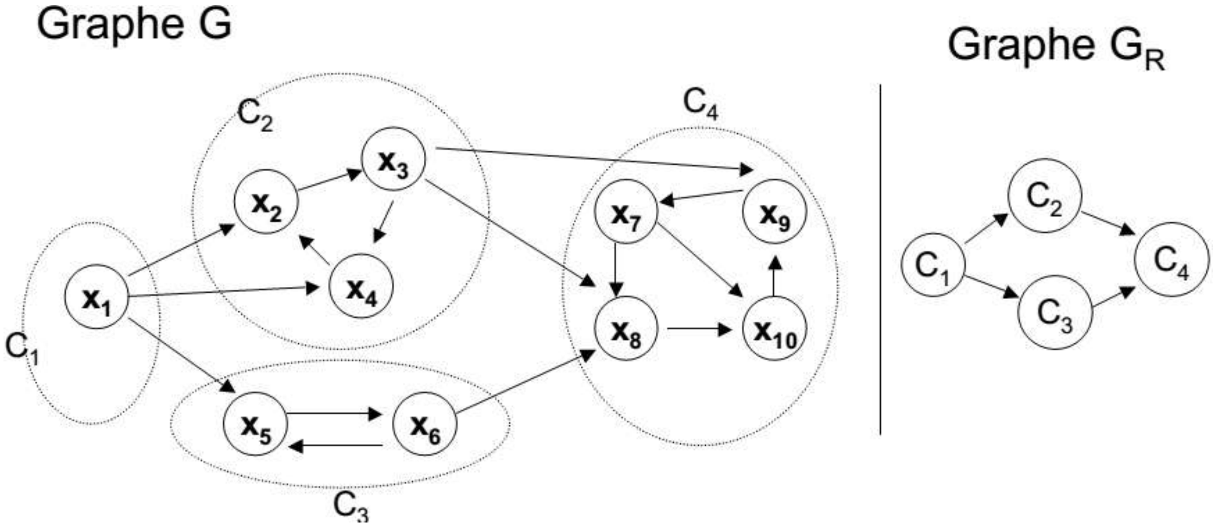
Exemple : trouvez les composantes fortement connexes de :



IX. <u>Graphe réduit</u>

Soit **G = (*X, U*)** un graphe orienté admettant *p* composantes fortement connexes : ***C_1, C_2, …, C_p.***

On définit le graphe réduit de G, noté $G_R = (X_R, U_R)$ pour lequel chaque composante fortement connexe de G est remplacée par un sommet.



Ce graphe ***G*** n'est pas fortement connexe. Par contre, on identifie *4* composantes fortement connexes.

Un arc (c_i , c_j) relié un nœud c_i à un nœud c_j dans le graphe $\underline{\boldsymbol{G_R}}$ s'il existe

- un arc qui relie x_i à x_j dans G où :
  $\boldsymbol{x_i}$ appartient à la composante fortement connexe $\boldsymbol{C_i}$ dans G
  $\boldsymbol{x_j}$ appartient à la composante fortement connexe $\boldsymbol{C_j}$ dans G

X. La recherche des composantes fortement connexes

Exemple d'utilisation : Lors de la conception d'un réseau de communication notamment, il peut être intéressant de savoir si la configuration choisie permet une communication de n'importe quel point à n'importe quel autre. Un moyen de le vérifier est de représenter le réseau sous la forme d'un graphe et vérifier qu'il est fortement connexe.

Algorithme 1 :

La recherche d'une composante fortement connexe à partir d'un sommet x_i :

- Parcourir le graphe à partir du point $\boldsymbol{x_i}$ dans le sens direct (i.e. en suivant les flèche des arcs) et de créer un ensemble des sommets parcourus. Le premier ensemble $\mathbf{X_1}$ regroupe les sommets accessibles à partir de $\boldsymbol{x_i}$
- Parcourir le graphe à partir du point $\boldsymbol{x_i}$ dans le sens indirect et de créer un ensemble des sommets parcourus. Ce deuxième ensemble $\mathbf{X_2}$ regroupe les sommets qui peuvent atteindre $\boldsymbol{x_i}$

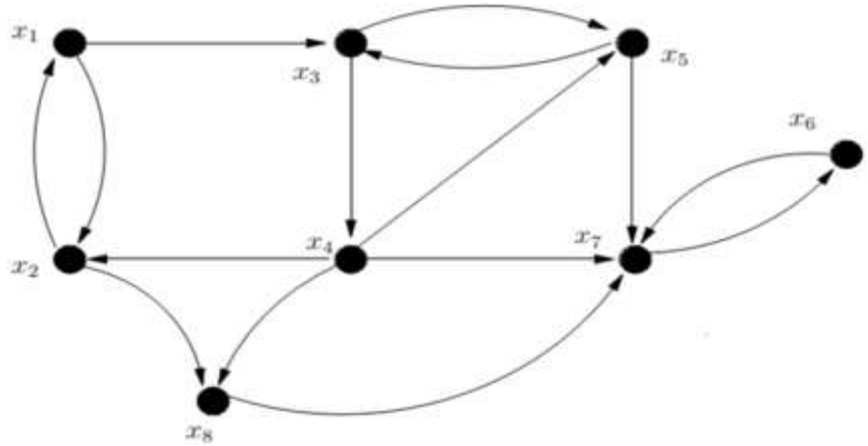
- L'intersection de ces deux ensembles donne les sommets qui à la fois peuvent atteindre x_i et sont accessible à partir de x_i.
- Cette intersection est donc la composante fortement connexe qui contient x_i

```
Algorithme 1 :
Recherche une composante fortement connexe à partir d'un sommet a
```

```
Algorithme 1 :
Rechercher une composante fortement connexe à partir d'un sommet a
--------------------------------------------------------------------
Entrées : G=(X ; U) un graphe, a un sommet.
--------------------------------------------------------------------
Sortie : X' un sous ensemble de sommets
--------------------------------------------------------------------
Variables intermédiaires : X1 et X2 : deux sous-ensembles de sommets,
examiner () : une fonction, x : un sommet.
--------------------------------------------------------------------
Début
// construction de l'ensemble X1
  X1 ← {a} ;
  Pour tout [x ∈ X] faire        examiner (x) ←  faux

  Tant que [∃ x ∈ X1 et non examiner (x)] faire
     examiner (x) ← vrai ;
     Pour tout [u=(x, y)∈U et y ∉ X1] faire X1 ← X1 ∪{y};
  Fin tant que
// construction de l'ensemble X2
  X2 ← { a } ;
  Pour tout [x ∈ X1] faire       examiner(x) ← faux ;

  Tant que [x ∈ X2 et non examiner (x)] faire
     examiner(x) ←vrai ;
     Pour tout [u=(y , x)∈U et y ∉X2] faire X2 ← X2 ∪{y};
  Fin tant que

  X' ← X1 ∩ X2 ;
Fin
```

```
Algorithme 1 : (version 2)
Rechercher une composante fortement connexe à partir d'un sommet a
--------------------------------------------------------------------
Entrées : G=(X ; U) un graphe, a un sommet.
--------------------------------------------------------------------
Sortie : X' un sous ensemble de sommets
--------------------------------------------------------------------
Début
 1. Marquer a par  +/-
 2. Sur l'ensemble des sommets non marqués par +/-
  • Marquer + tout sommet suivant d'un sommet marqué par +
  • Marquer - tout sommet précédent d'un sommet marqué par -
 3. X' = tout sommet marqué par +/-
Fin
```

Exemple : chercher une composante fortement connexe à partir du sommet x1 ?



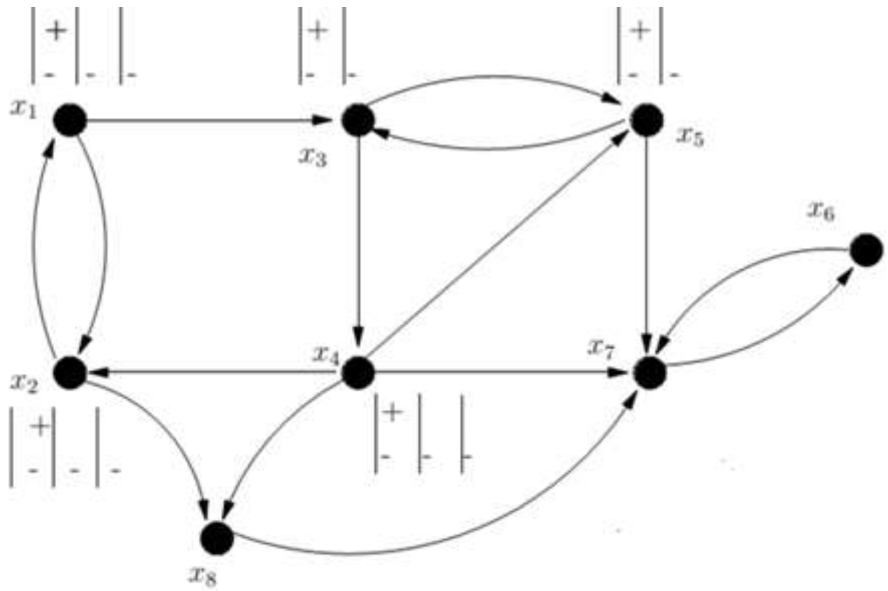
- *En utilisant l'algorithme 1 :*

X1 ← $\{x_1, x_2, x_3, x_8, x_4, x_5, x_7, x_6\}$

X2 ← $\{x_1, x_2, x_4, x_3, x_5\}$

X' ← $\{x_1, x_2, x_4, x_3, x_5\}$

- *En utilisant l'algorithme 2 :*



X' ← $\{x_1, x_2, x_4, x_3, x_5\}$

<u>Algorithme 2 :</u>

<u>La recherche de toutes les composantes fortement connexes :</u>

- Choisir au hasard un sommet et déterminer, grâce à l'algorithme précédent, la composante fortement connexe qui le contient. On obtient alors une première composante fortement connexe C1.
- Ensuite, parmi les sommets qui ne font pas partie de C1, on en prend un autre sommet au hasard pour déterminer la composante fortement connexe qui le contient. On obtient C2,
- On recommence jusqu'à ce que tous les sommets appartiennent à une composante fortement connexe.

Algorithme 2 : La recherche de toutes les composantes fortement connexes :
Entrées : G=(X ; U) un graphe.
Sortie : C = $\{C_1, \dots, C_N\}$ un ensemble de composantes connexes.

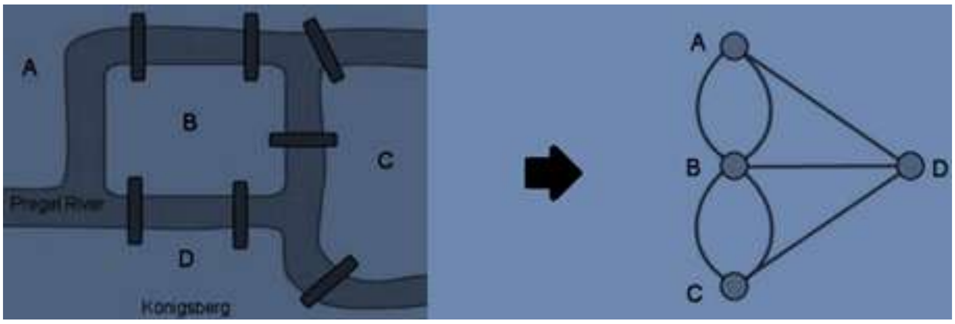
```
Variables intermédiaires: X': un sous ensemble de sommets, x : un sommet, i un entier.
Début
  X' ← X ;
  i  ← 1 ;
  tant que [X'≠∅] faire
    choisir x dans X' ;
    Ci ← algorithme1_ComposanteFortementConnexe (G, x) ;
    X' ← X' - Ci ;
    i ← i + 1 ;
  fin tant que ;
Fin
```

XI. Théorème D'Euler :

1. Une chaîne eulérienne est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes :
   - Elle contient toutes les arêtes de graphe,
   - Chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.
2. Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes.
3. Un graphe est eulérien si et seulement si il contient un cycle eulérien.
4. Un graphe est semi-eulérien si et seulement si il contient une chaîne eulérienne

Une chaine (cycle) eulérienne = On peut dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois par la même arête.

L'origine du problème : problème de cycle eulérien (Le problème de Königsberg)



Théorème : *Un graphe connexe* a une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont pairs sauf au plus deux. De façon plus précise :

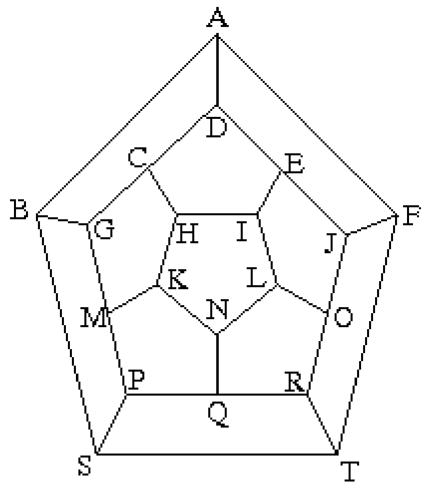
- Un graphe ayant des sommets impairs → ne possède pas de chaîne eulérienne.
- Si le graphe n'a pas de sommets impairs, alors il a un cycle eulérien.
- Si le graphe a deux sommets impairs → ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

Le problème de Königsberg devient: le graphe a-t-il une chaine eulérienne ?
Le théorème d'***Euler*** nous permet de répondre ***non***, puisque les 4 sommets sont impairs.

XII. Graphe Hamiltonien :

On appelle chaîne Hamiltonien sur un graphe une chaîne passant par tous les sommets du graphe une fois et une seule. Un cycle Hamiltonien est un cycle passant par tous les sommets du graphe une fois et une seule.

- Un graphe est Hamiltonien s'il possède un cycle Hamiltonien.
- Un graphe est semi-Hamiltonien s'il possède une chaine Hamiltonienne.



L'origine du problème : un jeu mathématique de Sir William Hamilton -1857, dont le but est de parcourir tous les sommets d'un dodécaèdre une et une seule fois, en partant et revenant du même endroit.

Le problème du voyageur de commerce est un problème mathématique qui consiste, étant donné un ensemble de villes séparées par des distances données, à trouver le plus court chemin qui relie toutes les villes (plus que 2 millions villes dans le monde). Il s'agit d'un problème d'optimisation pour lequel on ne connait pas d'algorithme permettant de trouver une solution exacte en un temps polynomial. De plus, la version décisionnelle de l'énoncé (pour une distance D, existe-t-il un chemin plus court que D passant par toutes les villes ?)

Remarques Générales:

- La somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.
- Le nombre de sommets de degré impair est pair.
  - Dans un graphe non orienté, *le degré* de chaque sommet est le nombre d'arêtes dont il est l'une des extrémités (Il ne faut pas oublier de compter deux fois les boucles, car le sommet est deux fois l'extrémité de cette arête).