Centre universitaire abdelhafid boussouf Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
1^{ere} Année maths **(Algèbre1)**

Série de TD N^0 2
Ensembles, relations et applications

Exercise 1.
Soit $E = \{a,\ b,\ c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :
1) $a \in E$, 2) $a \subset E$, 3) $\{a\} \subset E$, 4) $\emptyset \in E$, 5) $\emptyset \subset E$, 6) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercise 2.
Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7[$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A^c, A \backslash B$, $A^c \cap B^c$, $(A \cup B)^c$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Exercise 3.
Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$ et donné une partition de E.

Exercise 4.
A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \backslash B = A \cap B^C$.
2. $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
6. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

Exercise 5.
Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{R}$ *et* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y$.
2. $E = \mathbb{R}$ *et* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$.
3. $E = \mathbb{N}$ *et* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists p,\ q \geq 1,\ y = px^q$ *(p et q sont des entiers).*

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence?

Exercise 6.
Soit $\mathcal{R}_3$ la relation définie dans $\mathbb{Z}$ par : $x\mathcal{R}_3y \Leftrightarrow 3$ divise $x - y$.

1. *Montrer que $\mathcal{R}_3$ est une relation d'équivalence. Elle est appelée congruence modulo 3 et on note $x \equiv y \mod (3)$ au lieu de $x\mathcal{R}_3y$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, déterminer la classe de x modulo 3.*
3. *On note $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $\mathcal{R}_3$. Quel est son cardinal?*

Exercise 7.
On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}\ y$ si et seulement si x divise y.

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.*

2. *Est-ce une relation d'ordre total ?*

3. *Décrire $\{x \in \mathbb{N}^*, x\mathcal{R}\ 5\}$ et $\{x \in \mathbb{N}^*, 5\mathcal{R}\ x\}$.*

4. *$\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?*

Exercise 8.
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x - 2$.

1. *Donner la définition de $f^{-1}(4)$. Calculer $f^{-1}(4)$.*

2. *L'application f est-elle bijective ?*

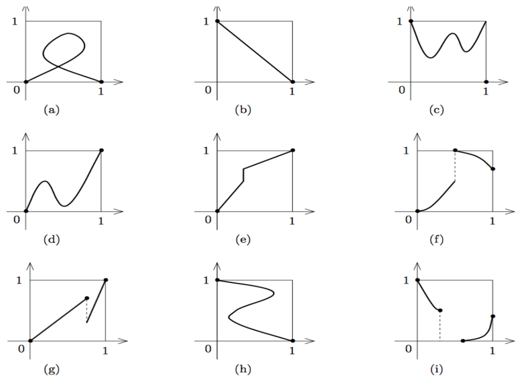
3. *Donner la définition de $f([-1,1])$. Calculer $f([-1,1])$.*

4. *Donner la définition de $f^{-1}([-2,4])$. Calculer $f^{-1}([-2,4])$.*

Exercise 9.
Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective?

Exercise 10.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$.

Exercise 11. *Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il s'agit du graphe d'une fonction, d'une application, injection, surjection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.*



Exercise 12.
Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1. *Montrer que si h est injective, f l'est aussi et que si h est surjective, g l'est aussi.*

2. *Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.*

3. *Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.*