L3 Mathématiques, S5, 2022-2023
Espaces vectoriels normés

Série d'exercices n°1

Exercice1 Soit E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\infty\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. on suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous suite convergente.

Exercice 2 Soit $X =]0, \infty[$. Pour $x, y \in X$, on note

$$\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

Montrer que δ est une distance sur X. L'espace métrique (X, d) est-il complet?

Exercice 3 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une norme sur E en posant

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$$

On va montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela on définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } & -1 \le t \le -\frac{1}{n} \\ nt \text{ si } & -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 \text{ si } & \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

1- vérifier que $f_n \in E$, $\forall n \geq 1$.
2- Montrer que

$$\|f_n - f_p\| \le \sup\left(\frac{2}{n}, \frac{2}{p}\right)$$

et en déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy.
3- Supposons qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\|_1)$. Montrer qu'alors on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0$$

pour tout $0 < \alpha < 1$.

4- Montrer qu'on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1|\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\, dt = 0$$

pour tout $0 < \alpha < 1$. En déduire que

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \text{ pour tout } -1 \le t < 0 \\ f(t) &= -1 \text{ pour tout } 0 < t \le 1 \end{aligned}$$

Conclure.

Exercice4
Soit X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé et $T : X \to Y$ une application linéaire continue. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$\|Tx\| \ge c\,\|x\| \quad \text{pour tout } x \in X.$$

1- Montrer que $\mathrm{Im}(T)$ est fermée dans Y.
2- Montrer que T réalise un isomorphisme entre X et $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice 5 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme sup: $\|f\|_{\infty} = \underset{t\in[-1,1]}{Sup}|f(t)|$

Soit F l'espace vectoriel des fonctions $2\pi-$périodique et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, que l'on muni soit de la norme N_2 telle que $N_2(f) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt}$, soit de la norme sup $N_{\infty} : N_{\infty}(f) = \underset{t\in\mathbb{R}}{Sup}\, f(t)$.

Soit $L : E \to F$ l'application définie par $L(f)(t) = f(\cos t)$.

1- Montrerque L est bien définie, est linéaire et injective.

2- Montrer que L est continue pour chacune des normes $N_2 et\ N_{\infty}$ de F, et calculer pour chacune de ces normes $\|L\|_2$ et $\|L\|_{\infty}$.