التفاضل الكلي لدالة ذات عدة متغيرات:

يعطى التفاضل الكلي للدالة ***f(x, y, z)*** بالشكل التالي:

$$df=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z=cte}dx+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z=cte}dy+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y=cte}dz$$

حيث:

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z=cte}dx$ هي المشتقة الجزئية بالنسبة ل x بثبوت y, z

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z=cte}dy$ هي المشتقة الجزئية بالنسبة ل x بثبوت z, x

$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y=cte}dz$ هي المشتقة الجزئية بالنسبة ل x بثبوت y, x

مثال: أوجد التفاضل الكلي للدالة $f(x,y,z)=x^3y^2+2xz^3$

نبدأ بحساب المشتقات الجزئية:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z=cte}=3y^2x^2+2z^3$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z=cte}=2x^3y$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y=cte}=6xz^2$$

و منه التفاضل الكلي للدالة ***f(x,y,z)***

$$df=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z=cte}dx+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z=cte}dy+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y=cte}dz$$

$$df=\left(3y^2x^2+2z^3\right)dx+\left(2x^3y\right)dy+\left(6xz^2\right)dz$$

II- المؤثرات التفاضلية (في جملة الإحداثيات الديكارتية)

- يعطى المؤثر النابلا Nabla بالعبارة:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

1- مؤثر التدرج

- إذا طبق المؤثر Nabla على **دالة سلمية** $f(x,y,z)$ سمي **تدرجا gradient**

$$\overrightarrow{grad}\, f=\vec{\nabla}.f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ملاحظة: ليكن الانتقال العنصري $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

ولتكن الدالة السلمية $f(x,y,z)$

* يمكن استنتاج عبارة التدرج بالاستعانة بالعلاقة $df(x,y,z) = (\vec{\nabla}f)(d\vec{l})$

* شعاع التدرج يدلنا على اتجاه التغير الاعظمي للدالة $f(x,y,z)$

2- التباعد:

إذا طبق nabla على مقدار شعاعي على شكل جداء سلمي في جملة الإحداثيات الديكارتية سمي **تباعدا** **.divergence**

- لتكن الدالة الشعاعية $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3- الدوران

إذا طبق nabla على مقدار شعاعي على شكل جداء شعاعي (صحيحة في جملة الإحداثيات الديكارتية فقط)

سمي **دورانا rotationnel**

لتكن الدالة الشعاعية $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$$\overrightarrow{rot}A = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\vec{k}$$

ملاحظات:

- العلاقة التالية محققة دوما

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \vec{0}$$

معنى هذا إذا كان لدينا مثلا $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$ فانه توجد دالة سلمية f حيث $\vec{A} = \overrightarrow{grad}\,f$

- تباعد الدوران معدوم دوما

$$div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = \vec{0}$$

- إذاكان $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$ نقول عن $\vec{A}$ أنها محافظة

لابلاسيان دالة سلمية:Laplacien d'une fonction scalaire

لابلاسيان دالة سلمية ذات عدة متغيرات ***f(x, y,z)*** هو سلم نرمز له ب ***Δf*** و يعرف على أنه تباعد تدرجها:

$$\Delta f = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ هي المشتقات الجزئية الثانية ل x و y و z على التوالي

مثال: لتكن الدالة السلمية f و الدالة الشعاعية $\vec{V}$ حيث:

$$f(x,y,z) = x^3y^2 + 2xz^3$$
$$\vec{V}(x,y,z) = x^2y\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + xz^3\vec{k}$$

تدرج f:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla}.f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y^2 + 2xz^3\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^2 + 2xz^3\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3y^2 + 2xz^3\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left(3x^2y^2 + 2z^3\right)\vec{i} + \left(2x^3y\right)\vec{j} + \left(6xz^2\right)\vec{k}$$

تباعد $\vec{V}$:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$div\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-3yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz^3)$$

$$div\vec{V} = 2xy - 3z^2 + 3xz^2$$

دوران $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -3yz^2 & xz^3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = 6yz\vec{i} - z^3\vec{j} - x^2\vec{k}$$

لابلاسيان f:

$$\Delta f = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\left(x^3y^2 + 2xz^3\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^3y^2 + 2xz^3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(x^3y^2 + 2xz^3\right)}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = 6xy^2 + 2x^3 + 12xz$$