Chapitre 1

Notions de base de la logique mathématique

1.1 Introduction

La logique est la base fondamentale de tous les raisonnements mathématiques. Elle est très importante pour l'énonciation de propositions et l'étude de leur valeur de vérité.
Dans ce premier chapitre, nous introduirons les bases de la branche des mathématiques appelée logique. Nous présenterons en particulier les définitions d'assertions, de tautologies et d'antilogies ainsi que les différents connecteurs logiques.
Ce chapitre prévoit les notions apparaissant dans les deux chapitres suivants soient la logique propositionnelle et la logique descriptive du premier ordre.

1.2 Assertion

Une assertion est un énoncé mathématique auquel on attribue l'une des deux valeurs logiques : le vrai (V) ou le faux (F).

Exemple

— L'assertion «$1 + 1 = 2$» est vraie.
— L'assertion «$2 + 2 = 5$» est fausse.

— Les propriétés, théorèmes sont des assertions vraies.

1.3 Tautologies et antilogies

Les assertions (dépendantes de P et Q) qui sont vraies quelle que soit la valeur de vérité de P et Q sont dites des tautologies. Une tautologie est en fait un théorème de logique. Les assertions (dépendantes de P et Q) qui sont fausses quelle que soit la valeur de vérité de P et Q sont dites des antilogies.

1.4 Connecteurs

Ils existent cinq (5) connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique. Soient P et Q deux assertions.

1.4.1 La négation « non » ou « ¬ »

Nous appellerons la négation de P, l'assertion (non P)(not P) et qui sera notée sous forme formalisée ¬P ou $\bar{P}$.

Table de vérité de la négation

Soit la proposition P (voir la table 1.1). La négation d'une proposition P (vraie)

P	$\neg P$
1	0
0	1

TABLE 1.1: Table de vérité de la négation

est une proposition fausse. Si P (fausse) alors $\neg P$ est vraie.

Négation de la négation

En général, une double négation vient souvent renforcer la négation tel que : voulez-vous sortir ? non, non.
En mathématique, une double négation est considérée comme une affirmation.

Exemples

1. Si P est la proposition $x = 0$, $\neg P$ est la proposition $x \neq 0$.
2. Le 05 est non pair donc 05 est impair.

Remarque

Le sens du symbole $\Longleftrightarrow$ qui se lit équivaut, et qui signifie ici que les deux propositions ont toujours la même valeur.

1.4.2 Conjonction « et » ou « $\wedge$»

Nous appellerons conjonction de P et Q, l'assertion (P et Q) (P and Q) et qui sera notée P $\wedge$ Q.

Exemple

P : « La terre est ronde »(vraie) et Q : « Le ciel est bleu » (vraie).
P et Q ou P $\wedge$ Q se lit donc « La terre est ronde **ET** le ciel est bleu ». P $\wedge$ Q est vraie. Nous dirons que l'assertion P $\wedge$ Q est fausse lorsque l'une au moins des deux assertions est fausse. Ainsi « La terre est ronde **ET** le ciel est vert » est une assertion fausse.

Commutativité

(P et Q) $\Longleftrightarrow$ (Q et P)

Table de vérité de la conjonction

Le résultat de la conjonction est démontré par la table de vérité 1.2.

P	**Q**	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Table 1.2: Table de vérité de la conjonction

1.4.3 Disjonction « ou » ou « $\vee$ »

Nous appellerons disjonction de P et Q, l'assertion (P ou Q) et qui sera notée P $\vee$ Q.

Remarque

En mathématiques, le «ou» est non-exclusif, c'est à dire qu'il comprend la possibilité que les deux propositions soient vraies. Ainsi la proposition « $xy = 0$ » équivaut à la proposition « $x = 0$ ou $y = 0$ » , elle est vraie quand l'un des deux nombres est nul, elle est aussi vraie quand les deux sont nuls.

Commutativité

$(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow (Q \text{ ou } P)$

Table de vérité de la disjonction

Le résultat de la disjonction est démontré par la table de vérité 1.3.

P	**Q**	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

TABLE 1.3: Table de vérité de la disjonction

1.4.4 Implication « $\Rightarrow$ »

La proposition notée « P $\Rightarrow$ Q » correspond à la proposition $NonP$ ou Q. P s'appelle alors l'hypothèse et Q la conclusion. $P \Rightarrow Q$ est une proposition qui se nomme implication et que nous pouvons lire de différentes façons :

— Si P alors Q,

— Pour que P il faut Q,

— Pour que Q il suffit P,

— P est une condition suffisante pour Q,

— Q est une condition nécessaire de P.

Table de vérité de l'implication

Le résultat de l'implication est montré à la table 1.4.

P	**Q**	$\neg P$	**P ⇒ Q**
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	1

TABLE 1.4: Table de vérité de la disjonction

L'assertion est vraie dès lors que P est fausse (quelle que soit la vérité de Q). Si P est vraie et (P ⇒ Q) vraie alors Q est vraie. De plus l'implication Q ⇒ P s'appelle la réciproque de l'implication P ⇒ Q.

Exemples

— $P : 2 = 2$ et $Q : 4 = 4$ sont deux assertions vraies, donc $P \Rightarrow Q$ ou ($NonP$ ou Q) est vraie,

— Si $x \in \{5, 6, 9\}$ alors $x \leqslant 9$ est une assertion vraie.

1.4.5 Équivalence « ⇔ »

Nous dirons que deux assertions sont logiquement équivalentes si elles ont la même valeur de vérité et seront notées $P \Leftrightarrow Q$. En d'autres termes $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies ou si toutes les deux sont fausses. La proposition $P \Leftrightarrow Q$ correspond à la proposition $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. Nous pourrons l'exprimer comme suit :

— P est équivalent à Q,

— Pour P, il faut et il suffit Q,

— P est une condition nécessaire et suffisante pour Q,

— P si et seulement si Q.

Table de vérité de l'équivalence

Le résultat de l'équivalence est montré à la table 1.5.

P	**Q**	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

TABLE 1.5: Table de vérité de l'équivalence

Exemple

Prenons (P et Q) et (Non (Non P ou Non Q)). Voir le résultat à la table 1.6.

1.5 Lois de Morgan

Les lois de De Morgan permettent de transformer une conjonction en une disjonction (et réciproquement) via la négation.

P	**Q**	**Non P**	**Non Q**	**Non P $\vee$ Non Q**	**Non(Non P ou Non Q)**	**P $\wedge$ Q**
V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F

TABLE 1.6: Exemple de l'équivalence

Remarque

La méthode des tables de vérité fournit une preuve de ces propriétés. Parmi les règles de calcul logique importantes il y a aussi les règles suivantes.

1. **Règle de double-négation :**

$$\bar{\bar{A}} = A$$

2. **Règle de commutativité :**

$$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \mathrm{B} * \mathrm{A}$$

avec $* = .$ ou $* = +$

3. **Règle de distributivité :**

$$\mathrm{A} + (\mathrm{B} \,.\, \mathrm{C}) = (\mathrm{A} + \mathrm{B}) \,.\, (\mathrm{A} + \mathrm{C})$$

et

$$\mathrm{A} \,.\, (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \,.\, \mathrm{B}) + (\mathrm{A} \,.\, \mathrm{C})$$

4. **Règle d'associativité :**

$$\mathrm{A} * (\mathrm{B} * \mathrm{C}) = (\mathrm{A} * \mathrm{B}) * \mathrm{C}$$

5. **Règle d'idempotence :**

$$A * A = A$$

avec $* = .$ ou $* = +$

Toute expression booléenne peut être écrite sous une forme particulière.

1. **Forme normale conjonctive (FNC) :** Une expression logique est en FNC si et seulement si elle est une conjonction d'une ou plusieurs disjonctions d'un ou plusieurs littéraux tel que : $(A + \bar{B} + \bar{C}).(\bar{D} + E + F)$
2. **Forme normale disjonctive (FND) :** Une expression logique est en FND si et seulement si elle est une disjonction d'une ou plusieurs conjonctions d'un ou plusieurs littéraux. Par exemple,$(\bar{A}.\bar{B}) + B + (\bar{C}.D.E)$; sachant qu'un littéral est une variable booléenne (une lettre) ou la négation d'une variable.

1.6 Les quantificateurs

Nous considérons dans ce qui suit deux types de quantificateurs.

1.6.1 Le quantificateur universel

Un quantificateur permet de préciser le domaine de validité d'une proposition. Le symbole $\forall$ qui signifie « quel que soit » ou « pour tout » représente le quantificateur universel. Ce symbole représente la lettre « A » renversée qui est l'initiale du mot anglais « All ». Il doit toujours être suivi du signe d'appartenance $\in$.

Exemple

$$\forall x \in R, x^2 \geq 0$$

Qui signifie « quel que soit x appartenant à R, x^2 est positif ou nul ».

1.6.2 Le quantificateur existentiel

Le symbole $\exists$ qui signifie « il existe au moins un ... tel que » représente le quantificateur existentiel. Ce symbole représente la lettre « E » renversée qui est l'initiale du mot anglais « exist ». On peut éventuellement rajouter un point d'exclamation pour montrer l'unicité. On a alors : $\exists!$ qui signifie « *il existe un unique...tel que*».

Exemple

$$\exists! x \in [0,1], x^2 + 4x + 1 = 0$$

Qui signifie « Il existe un unique x appartenant à l'intervalle $[0,1]$ tel que : $x^2 + 4x + 1 = 0$ ».

1.6.3 Propriétés des quantificateurs

Les quantificateurs possèdent un certain nombre de propriétés dont :

— **L'ordre des quantificateurs :** L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs change la signification.
Exemple : $\forall x \in R, \exists y \in R, y > x$, qui signifie « *Quel que soit le réel x, il existe au moins un réel y tel que y soit supérieur à x* ». On peut toujours trouver un nombre supérieur à un nombre réel donné car l'ensemble R n'est pas borné. La proposition est vraie.
Inversons maintenant les quantificateurs $\exists x \in R, \forall y \in R, y > x$, « *Il existe au moins un réel x tel que pour tout réel y, y soit supérieur à x* ». Cette proposition cette fois est fausse car on ne peut trouver un réel inférieur à tous les autres. En effet l'ensemble R n'a pas de borne inférieure.

— **Négation d'une proposition universelle :**Une proposition universelle s'énonce : « *Pour tout élément x d'un ensemble E, x possède la proposition P* ». Sa négation sera : « *il existe au moins un élément x de l'ensemble E qui ne possède pas la propriété P* ».
Exemple : soit la proposition « *Tous les lecteurs de ce chapitre comprennent tout ce qui est écrit*» sa négation sera donc : « *Il existe au moins un lecteur qui ne comprend pas ce chapitre* ».
Remarque : Pour démontrer qu'une proposition universelle n'est pas vraie,

il suffit donc de trouver un seul x qui ne vérifie pas la proposition P. C'est ce qu'on nomme un « *contre-exemple* ».

— **Négation d'une proposition existentielle :**Une proposition existentielle s'énonce : « *Il existe au moins un élément x de l'ensemble E qui possède la propriété P* ». Sa négation sera : « *Pour tout élément x de l'ensemble E, x ne vérifie pas P* ».
  Exemple : Soit la proposition P : $\exists x \in R, x^2 = -1$. Cette proposition est fausse car un carré ne peut être négatif. Par contre sa négation est vraie : $\forall x \in R, x^2 \neq -1$.

1.7 Théorie des ensembles

La théorie des ensembles se donne comme primitives les notions d'ensemble et d'appartenance, à partir desquelles elle reconstruit les objets usuels des mathématiques : fonctions, relations, etc. Dans ces sous-section, nous présenterons les notions d'ensemble, de sous-ensemble et de relation.

1.7.1 Ensemble

Un ensemble est une collection d'éléments que l'on peut énumérer ou définir par une propriété. Certains ensembles ont des notations particulières (ex. N, Z, D, Q, R). Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on dit que cet ensemble est défini par extension, lorsqu'on définit un ensemble par une propriété, on dit que cet ensemble est défini par compréhension. Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle : l'ensemble vide noté $\emptyset$.

Exemple

N ensemble des entiers naturels, $N = \{1, 2, 3, ...\}$
Lorsque le nombre des éléments d'un ensemble devient trop important ou qu'il y a un nombre infini d'éléments, on ne peut le définir par compréhension tel que : $C = \{x \in N/1 \leqslant x \leqslant 49\}$.

1.7.2 Élément

Un ensemble est constitué d'éléments. On représente souvent un élément par une minuscule. On dit qu'un élément « a » appartient à un ensemble A. On écrit alors : $a \in A$. Le symbole $\in$ signifiant « *appartient à* » est initiale de « *élément* ».

1.7.3 Sous-ensemble

On dit qu'un ensemble A est un sous-ensemble de l'ensemble E si et seulement si tout élément de A est élément de E ou si $A = \emptyset$. On dit alors que A est inclus dans E. $A \subset E \Leftrightarrow \forall a \in A, a \in E$ ou $A = \emptyset$. Le symbole $\subset$ signifie « *inclus dans* ».

1.7.4 Complémentaire d'un ensemble

On appelle complémentaire de l'ensemble A dans l'ensemble E, l'ensemble noté $C_E(A)$ composé des éléments de E qui ne sont pas élément de A. Le complémentaire correspond au connecteur NON. On a alors : $a \in C_E(A) \Leftrightarrow a \in E$ et $a \notin A$. Le symbole $\notin$ signifie « *n'appartient pas à* ». Lorsque l'ensemble$E$ est implicite, on note le complémentaire de A : $\bar{A}$ qui se prononce « A *barre* ».

Exemple

Soit E l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 et soit A l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 20. On a donc : $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. L'ensemble $C_E(A)$ sera donc l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 qui ne sont pas premiers. On a donc : $C_E(A) = \{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$.

1.7.5 Intersection de deux ensembles

On appelle intersection de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté : $A \cap B$ (A inter B) constitué des éléments communs à A et B. On a donc : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$.

Exemple

Soit A l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 20 et soit B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 inférieurs ou égaux à 20.
On a donc :

— $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,
— $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,
— $A \cap B = \{0, 6, 12, 18\}$ qui n'est autre que l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 inférieurs ou égaux à 20.

Remarques

— Lorsque l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on a alors : $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
— Lorsque les ensembles A et B sont disjoints, ils ne possèdent aucun élément commun, leur intersection est donc vide, on a donc : $A \cap B = \emptyset$. Ce qui signifie que A et B sont disjoints, comme c'est le cas entre l'ensemble A et sont complémentaire $\bar{A}$, on a donc : $A \cap A = \emptyset$.

1.7.6 Union de deux ensembles

On appelle union de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté : $A \cup B$ (A union B) constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (*éventuellement aux deux, le « ou » étant non exclusif*). On peut alors écrire : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$.

Exemple

Soit A l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 20 et soit B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 inférieurs ou égaux à 20. On a donc :

— $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,
— $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,
— $A \cap B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$.

Remarques

1. Lorsque l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on a alors : $A \subset B \Rightarrow A \cap B = B$,
2. L'union de l'ensemble A et de son complémentaire $\bar{A}$ donne l'ensemble E, c'est à dire : $A \cap A = E$.

1.8 Relations

Nous considérons dans ce cours deux types de relations citées dans ce qui suit.

1.8.1 Relation d'équivalence

Une relation est une relation d'équivalence si elle est :

— **Symétrique :** $\forall x \in E, \forall y \in E$, x R y $\Rightarrow$ y R x,

— **Réflexive :** $\forall x \in E, xRx$,

— **Transitive :** $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (xRy)$ et $(yRz) \Rightarrow xRz$.

Remarques

1. Dans le cas d'une relation d'équivalence, deux éléments en relation sont aussi dits équivalents,
2. Si R est une relation d'équivalence et x est un élément de E, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble des éléments y de E tels que xRy.

1.8.2 Relation d'ordre

Une relation d'ordre est une relation réflexive, anti-symétrique, transitive.

— **Réflexive :** $\forall x \in E, xRx$,

— **Anti-symétrique :** $\forall x \in E, \forall y \in E, (xRyetyRx) \Rightarrow x = y$,

— **Transitive :** $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (xRyetyRz) \Rightarrow xRz$.