

CHAPITRE 05 :**STRUCTURES ISOSTATIQUES ET HYPERSTATIQUES****5.1 Indétermination statique :**

Toute structure est soumise à :

- Des charges (forces connues) qui peuvent être des charges permanentes ou des surcharges d'exploitation. Ces charges peuvent être réparties ou concentrées, fixes ou mobiles ;
- Des réactions (forces inconnues) qui sont les actions des appuis sur la structure. Ces réactions peuvent être déterminées à partir des équations de l'équilibre statique.

Pour une structure plane, les conditions d'équilibre statique sont au nombre de trois :

$$\sum F_{ext/x} = 0 \quad ; \quad \sum F_{ext/y} = 0 \quad ; \quad \sum M_{F_{ext}/point} = 0 \quad (5.1)$$

Lorsque la structure étudiée (supposée en équilibre) est composée de différentes membrures, les équations de la statique doivent, bien entendu, être satisfaites pour la structure considérée globalement. En outre, chaque barre, chaque nœud d'assemblage et toute portion de la structure doit, forcément, être en équilibre. Cela signifie que les équations de la statique doivent également être satisfaites pour chaque composant, chaque nœud et chaque portion de la structure étudiée. Or l'analyse d'une structure est généralement menée de façon à calculer les efforts de liaison (réactions) et les efforts internes. Donc, si ceux-ci sont accessibles au départ des seules équations d'équilibre de la statique, la structure est dite **statiquement déterminée**, ou encore, **isostatique**. Si, par contre, les efforts de liaison et/ou les efforts internes ne sont pas accessibles au départ des équations d'équilibre de la statique, la structure est dite **statiquement indéterminée** ou encore, **hyperstatique**.

Par rapport à une structure isostatique, une structure hyperstatique contient un nombre surabondant d'appuis (ou d'inconnues). En d'autres termes, il existe plusieurs façons différentes de réaliser l'équilibre des structures hyperstatiques alors qu'il n'en existe qu'une seule et unique pour les structures isostatiques. Par conséquent, les structures hyperstatiques nécessitent des conditions supplémentaires pour leur résolution (Figure 5.1).

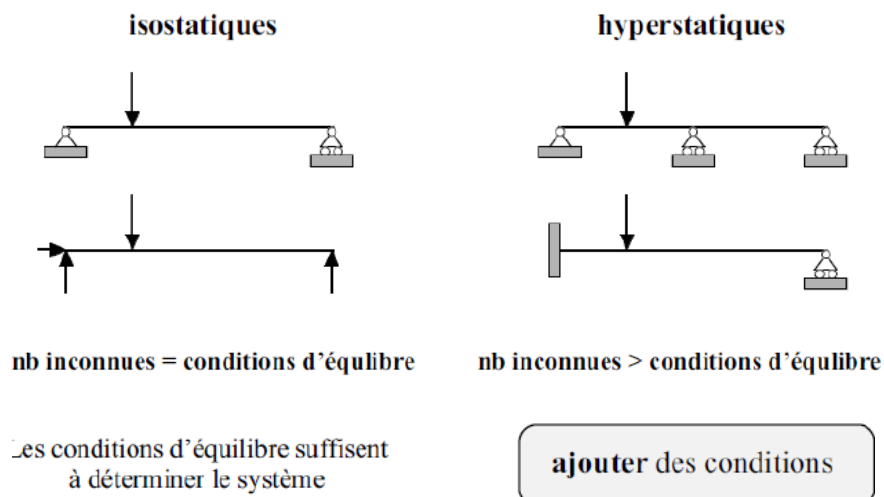


Figure 5.1 – Le nombre d'inconnues est identique aux conditions d'équilibre pour les structures isostatiques (à gauche) alors qu'il est plus grand dans le cas des structures hyperstatiques (à droite).

L'hyperstaticité peut être imputable à différentes causes. On parlera d'hyperstaticité externe si le nombre d'efforts de liaison (réactions) excède le nombre d'équations d'équilibre. Quelques exemples d'hyperstaticité externe sont repris à la Figure 5.2.

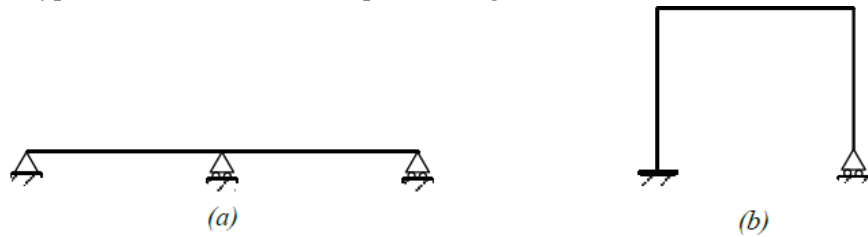


Figure 5.2 – La poutre (a) est une fois hyperstatique et le portique (b) est deux fois hyperstatique (extérieurement).

La résolution complète d'une structure exige non seulement la détermination des réactions d'appuis, mais aussi la détermination des efforts internes en toute section de la structure. Si la connaissance des réactions d'appui permet la détermination des efforts internes en toute section de la structure, on dit que la structure est isostatique intérieurement. Par contre, si la connaissance des réactions d'appui ne permet pas la détermination des efforts internes en toute section de la structure, on dit que la structure est hyperstatique intérieurement.

La structure de la figure 5.3(a) est isostatique extérieurement mais hyperstatique intérieurement, car la détermination préalable des réactions d'appui ne permet pas le calcul des efforts internes dans l'élément BC . Une coupure S dans l'élément BC (figure 5.3(c)) met en évidence trois inconnues (surabondantes). Donc la structure de la figure 5.3 (a) est hyperstatique intérieurement d'ordre 3.

La structure de la figure 5.3(b) est hyperstatique extérieurement d'ordre 3, car on a six réactions d'appui inconnues et trois équations d'équilibre. Cette structure est aussi hyperstatique intérieurement d'ordre 3. Donc, elle est hyperstatique d'ordre 6.

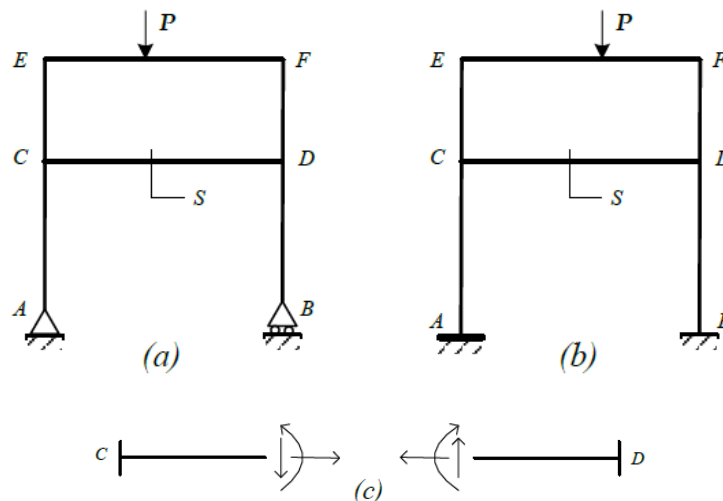


Figure 5.3 – La structure (a) est trois fois hyperstatique et le portique (b) est six fois hyperstatique

5.2. Détermination du degré d'hyperstaticité :

Comme il a été mentionné, le nombre de liaisons surabondantes constitue le degré d'hyperstaticité de la structure. Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le degré d'hyperstaticité (noté H) ; nous en examinerons deux.

5.2.1. Méthode de la suppression des liaisons

La méthode consiste à supprimer des liaisons jusqu'à ce que la structure devienne isostatique indéformable (s'assurer qu'aucune barre ou partie du système ne constitue un mécanisme). Le nombre de liaisons supprimées représente le degré d'hyperstaticité (voir exemples figure 5.4).

5.2.2 Méthode des contours fermés

Appelons :

- "c" le nombre de contours de la structure
- "a" le nombre d'articulations (y compris les appuis doubles)
- "s" le nombre d'appuis simples

Le degré d'hyperstaticité est donné par :

$$H = 3c - a - 2s$$

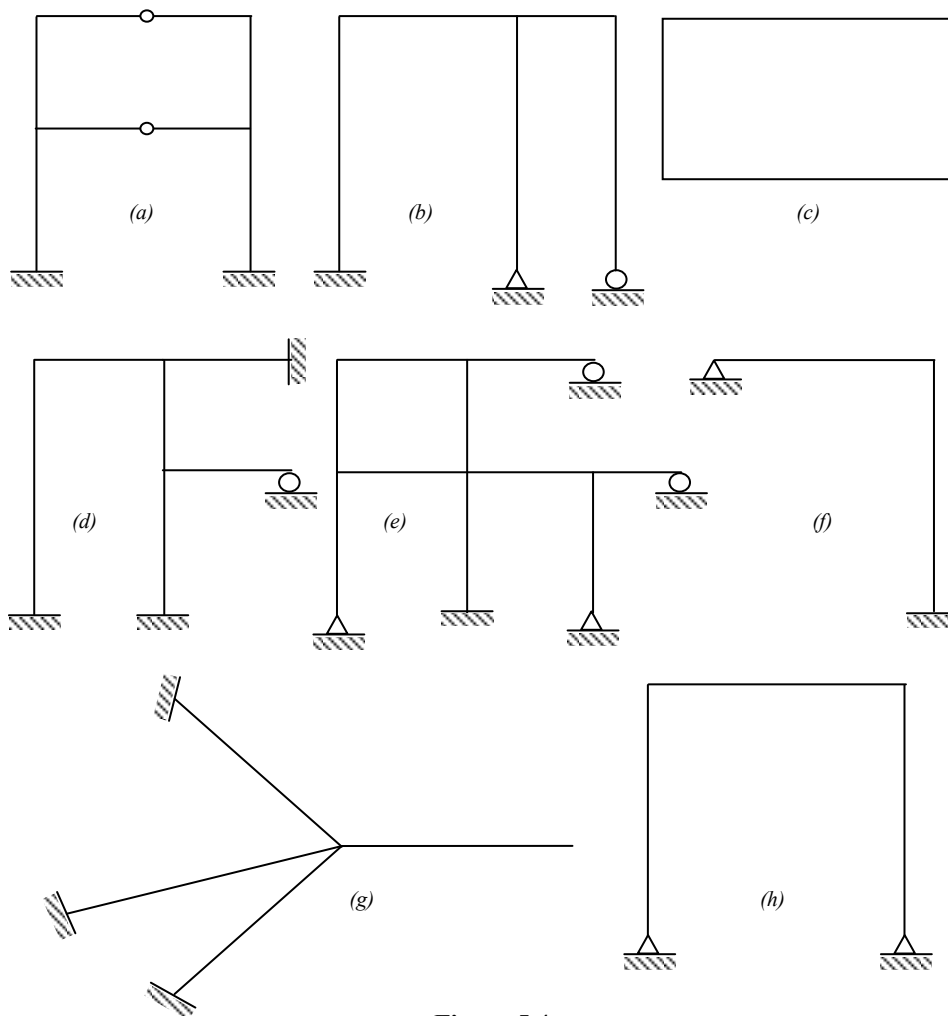


Figure 5.4

Cas des poutres en treillis chargées indirectement

$$H = b + l - 2n$$

- $b + l - 2n < 0 \Rightarrow$ système déformable
- $b + l - 2n = 0 \Rightarrow$ système isostatique
- $b + l - 2n > 0 \Rightarrow$ système hyperstatique

avec :

- "b" nombre de barres
- "l" nombre de liaisons dans les appuis (encastrement =3 ; appui double =2; appui simple =1)
- "n" nombre de nœuds

5.3. POUTRES HYPERSTATIQUES

On appelle poutres hyperstatiques, les poutres dont les réactions aux appuis ne peuvent pas être déterminées par les seules équations de la statique. Le degré d'hyperstaticité de la poutre est égal au nombre d'inconnues surabondantes par rapport aux 3 équations d'équilibre de la statique. Les exemples de systèmes hyperstatiques sont nombreux: la majorité des structures portantes de génie civil sont hyperstatiques comme les portiques auto-stables, les poutres continues sur plusieurs appuis etc...(Fig. 5.5)

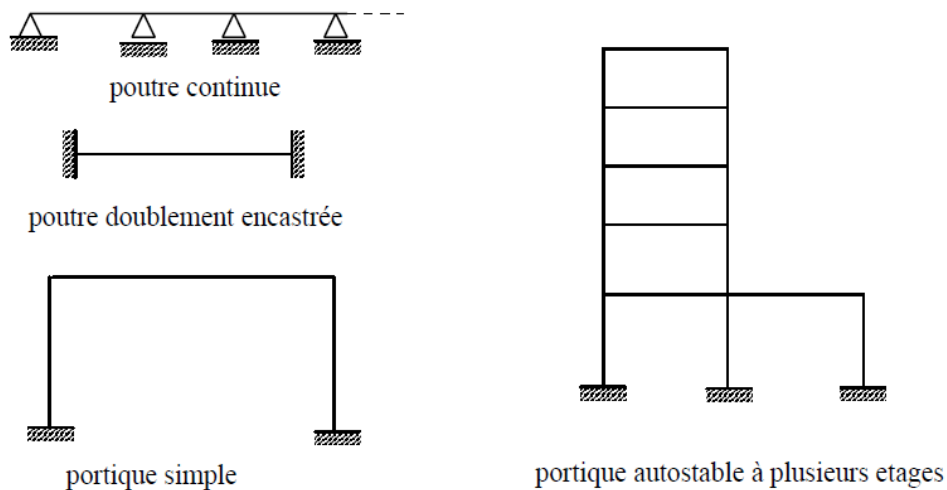


Fig. 5.5

5.3.1. Méthode des trois moments :

La méthode des trois moments s'applique aux systèmes dits poutres continues. On suppose que l'effet de l'effort tranchant est négligé.

Principe de la méthode des trois moments :

Cette méthode consiste à déterminer les moments fléchissant dans le cas des poutres continues. C'est-à-dire des poutres qui reposent sur plus de deux appuis.

Il existe plusieurs façons pour déterminer le degré d'hyperstaticité :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

$$d = r - 3$$

r : le nombre de liaisons (réactions)

Ou bien :

$$d = n_a - 2$$

n_a : le nombre d'appuis

Ou bien :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

Exemples :

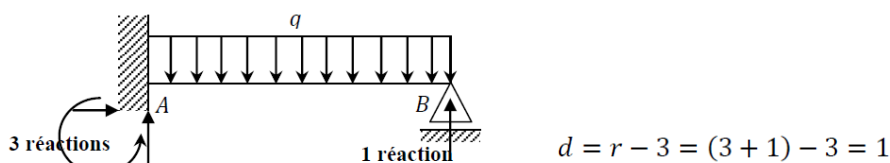
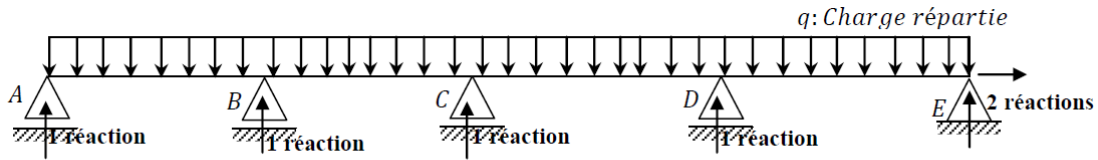


Figure 5.6. : Poutre sur 2 appuis (1 Encastrement et 1 simple)



$$d = r - 3 = 6 - 3 = 3$$

Figure 5.7. : Poutre sur 5 appuis (1 double et 4 simples)

5.3.2. Calcul des moments fléchissant dans les appuis :

- Considérons l'exemple de la figure 5.8. Le degré d'hyperstaticité de cette poutre est égal à $N-2$ où N représente le nombre d'appuis
- Prenons pour inconnues hyperstatiques les moments fléchissants agissant au droit de chaque appui intermédiaire. Pour ce faire, on procède à des coupures de manière à supprimer la liaison de moment au niveau de chaque appui.
- Dans chaque appui nous avons deux rotations (une à gauche et l'autre à droite).
- Pour une poutre de $N-1$ travées, on numérote les appuis de 1 à N . La travée l_i est comprise entre les appuis (i) et (i+1), avec une rigidité EI_i .

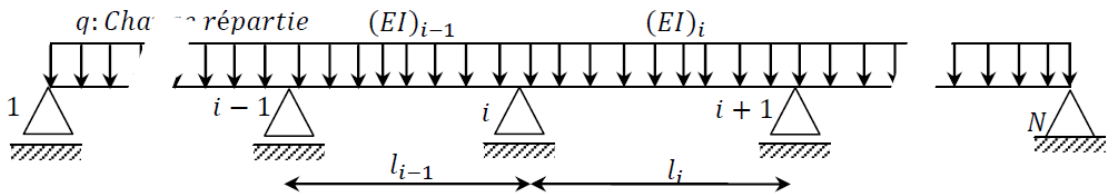


Figure 5.8. : Poutre continue sur N appuis

Une poutre continue comportant $N-1$ travées peut être décomposée en $N-1$ poutres isostatiques sur lesquelles s'appliquent les mêmes charges que sur la poutre continue avec en plus les moments aux appuis. Nous obtenons alors pour la travée $i-1$ et i :

- M_{i-1} : désigne le moment sur l'appui A_{i-1}
- M_i : désigne le moment sur l'appui A_i
- M_{i+1} : désigne le moment sur l'appui A_{i+1}

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = 0$$

On a deux types de rotations :

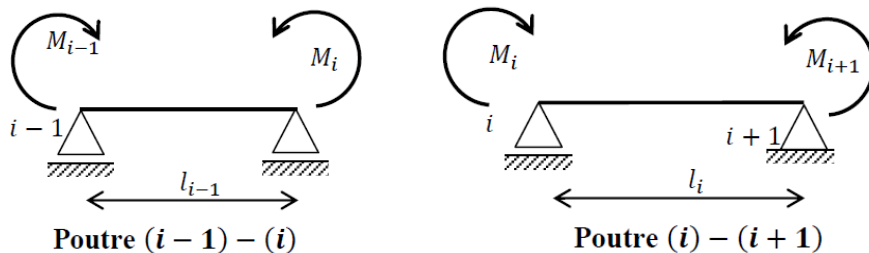
- Rotation due aux charges extérieures ($\varphi_{ig} + \varphi_{id}$)
- Rotation due aux moments fléchissants ($\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}$)

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}) = 0$$

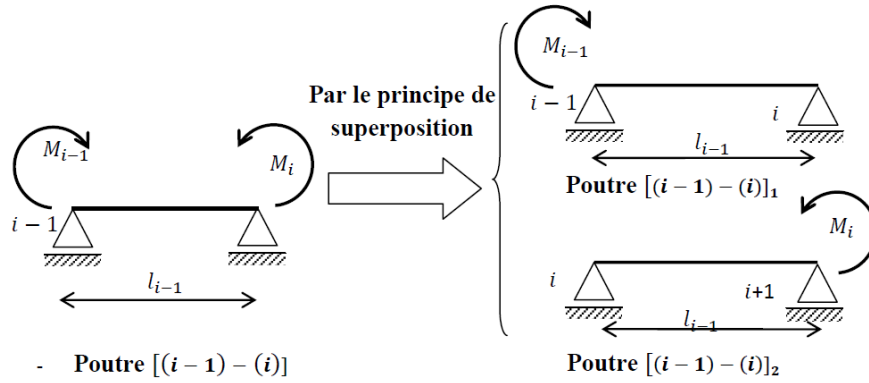
A- Rotations dues aux moments fléchissants ($\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}$)

Les déformations en général et spécifiquement les rotations dues aux moments fléchissants peuvent être évaluée par l'une des méthodes analytiques connues comme par exemple : la méthode de CASTIGLIANO ou Maxwell-Mohr et aussi la méthode graphique de VERETCHAGUINE.

Ici le calcul des rotations est effectué par la méthode de Mohr.



A1- Poutre (i - 1) - (i) :



- Poutre [(i - 1) - (i)]

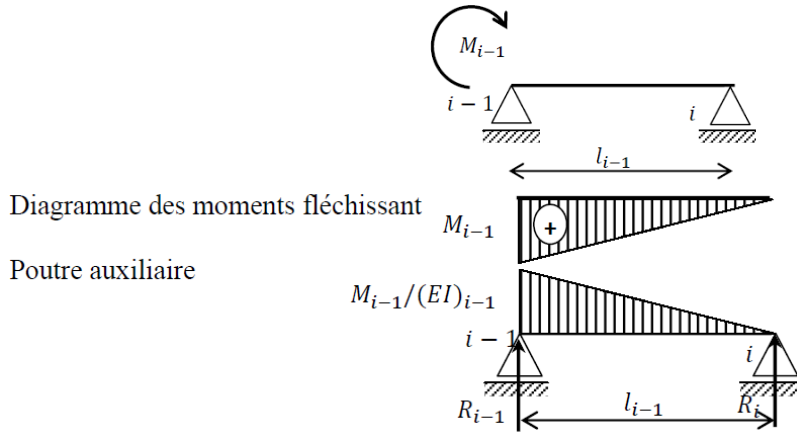


Diagramme des moments fléchissant

Poutre auxiliaire

$$\sum M/(i - 1) = 0 \Rightarrow R_i l_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} \left(\frac{1}{3} l_{i-1} \right)$$

$$R_i = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

- Poutre [(i - 1) - (i)] :

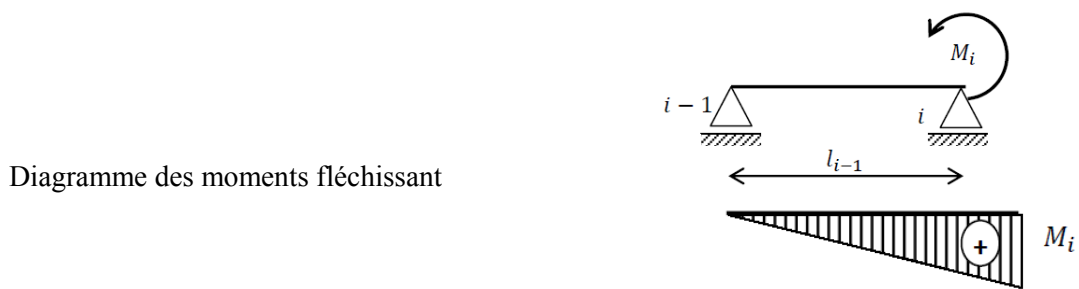


Diagramme des moments fléchissant

Poutre auxiliaire

$$\sum M/(i - 1) = 0 \Rightarrow R_i l_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} \left(\frac{2}{3} l_{i-1} \right)$$

$$R_{i-1} = \overline{\varphi}_{ig} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

$$\overline{\varphi}_{ig} = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

A2- Poutre (i) - (i + 1) :

De la même pour la poutre (i) - (i + 1)

$$\overline{\varphi_{id}} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i$$

$$\sum \text{Rotations/point } (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi_{ig}} + \overline{\varphi_{id}}) = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} M_i \left(\frac{l_{i-1}}{(EI)_{i-1}} + \frac{l_i}{(EI)_i} \right) + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

Cette équation est appelée méthode des trois moments (dite aussi méthode des rotations) ou aussi méthode de Clapeyron. Elle permet de calculer les moments aux appuis intermédiaires des poutres continues.

Si toutes les travées de la poutre ont la même rigidité EI , la relation devient :

$$M_{i-1}l_{i-1} + 2(l_{i-1} + l_i)M_i + M_{i+1}l_i = -6EI(\varphi_{ig} + \varphi_{id})$$

B- Rotations dues aux charges extérieures ($\varphi_{ig} + \varphi_{id}$)

Le tableau suivant résume les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures :

Tableau 5.1 : les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures.

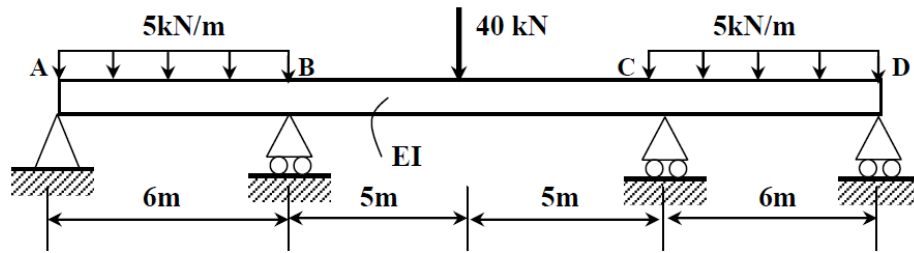
Schéma statique (géométrie et chargement)	$-6EI\varphi_{i-1}$	$-6EI\varphi_i$
	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$
	$-\frac{3}{8}Pl^2$	$-\frac{3}{8}Pl^2$
	$-\frac{1}{4}ql^3$	$-\frac{1}{24}ql^3$
	$-\frac{1}{4l}qa^2(2l-a)^2$	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$

Exemple

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité constante. Elle supporte une charge répartie de 5kN/m sur la travée AB et CD et une charge concentrée de 40kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminés :

- Les réactions aux appuis.
- Tracer le diagramme des moments fléchissants et des efforts tranchants.



Correction :

Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatique}$$

Point B :

$$6M_A + 2(6 + 10)M_B + 10M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q \frac{l^3}{4} = -5 \frac{6^3}{4} = -270 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 10^2 = -1500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -1770 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Et $M_A = 0$

Donc :

$$32M_B + 10M_C = -1770 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Point C :

$$10M_B + 2(10 + 6)M_C + 6M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd}) :$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Cg} &= -\frac{5}{8}Pl^2 = -\frac{5}{8}40 \cdot 10^2 = -1500 \\ -6EI\varphi_{Cd} &= -q \frac{l^3}{4} = -5 \frac{6^3}{4} = -270 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd}) = -1770 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

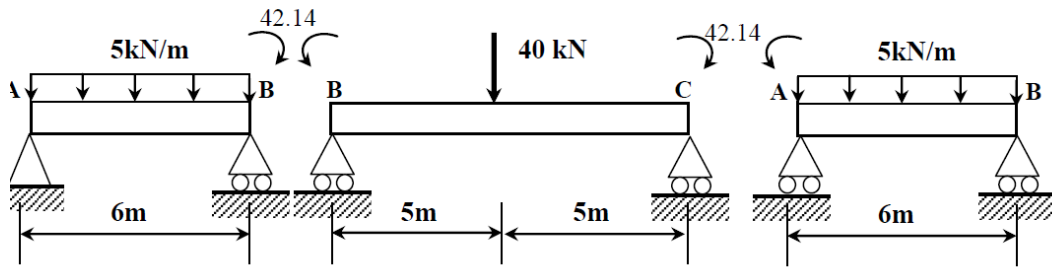
Et $M_D = 0$

Donc :

$$10M_B + 32M_C = -1770 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 10 \\ 10 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 1770 \\ 1770 \end{Bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow M_B = M_C = -42.14 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Calcul des réactions : par le principe de la décomposition (superposition)



Les réactions dues aux charges extérieures :



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :



Les réactions totales :

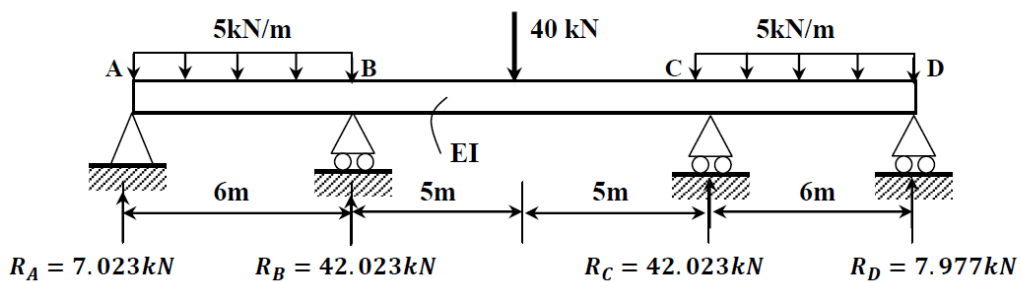


Diagramme des efforts tranchants

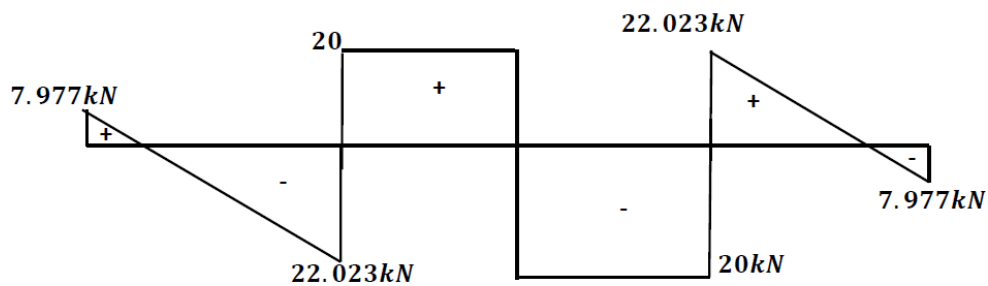


Diagramme des moments fléchissant :

