CHAPITRE 4: SOLLICITATIONS COMPOSÉES

INTRODUCTION

Pour simplifier l'étude des effets des sollicitations, nous avons jusqu'ici considéré les différentes sollicitations séparément. Dans le cas général une section peut être soumise à l'action des six composantes de l'effort internes à savoir (N, Tx, Ty, Mx, My, Mz) et qui ont été classées sous quatre catégories de sollicitation ou déformation simple: traction et compression (N), cisaillement (Tx , Ty) torsion Mx et flexion My, Mz. Dans la pratique courante, on rencontre rarement des cas où les sollicitations sont simples moins encore ou les six composantes des efforts internes apparaissent en même temps au niveau d'une section.

Dans ce chapitre on étudiera la combinaison de deux flexions dite flexion déviée et la combinaison de la flexion déviée avec la traction ou la compression communément appelée flexion composée.

4.1. FLEXION COMPOSEE

La flexion composée provient de l'action conjuguée d'une flexion due à un chargement latérale et d'un effort axial (traction ou compression) ou seulement de l'effet d'un effort normal excentré par rapport à l'axe moyen de l'élément.

4.1.1) Flexion composée avec traction ou compression

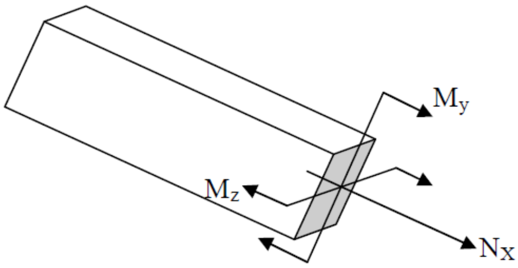
C'est le cas général d'une poutre soumise à des chargements transversaux et longitudinaux, ou en une section arbitraire, les efforts *Mz*, *My*, *Qx*, *Qy* ainsi que *N* sont présents.

En utilisant le principe de superposition, on peut déterminer la contrainte normale globale en un point quelconque de la section normale par :

$\sigma_1 = \pm \frac{M_z}{I_z} y$ Contrainte due au M_z

$\sigma_2 = \pm \frac{M_y}{I_y} z$ Contrainte due au M_y

$\sigma_3 = \pm \frac{N_x}{A}$ Contrainte due au N_x

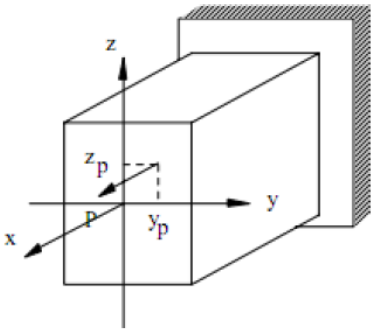


Donc la contrainte globale est donné par :

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{N_x}{A} \qquad (4.1)$$

4.1.2) Traction ou compression excentrée

La flexion composée peut être aussi le résultat de l'action d'une force longitudinale excentré par rapport à l'axe moyen de la poutre. On rencontre ce cas de chargement généralement dans les éléments courts sollicités par une force excentrée dont les coordonnées du point d'application sont yp, zp.



Les efforts internes en une section quelconque sont :

$N = P,$ $\qquad M_Z = P^* y_p,$ $\qquad My = P^* z_p$

D'où les contraintes en un point dans la section :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{A}{P}\frac{M_y}{I_y} z + \frac{A}{P}\frac{M_z}{I_z} y\right]$$

$$\sigma = \frac{P}{A}\left[1 + z_p \frac{A}{I_y} z + y_p \frac{A}{I_z} y\right]$$

On pose : $i = \sqrt{\frac{I_i}{A}}$ rayon de giration suivant l'axe i

$$\sigma = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y\right] \quad (4.2)$$

L'équation de l'axe neutre :

C'est l'ensemble des fibres dans les quelles la poutre ne subit aucune traction ou compression c'est-à-dire la contrainte est nulle.

$$\sigma = 0 = 1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \quad (4.3)$$

D'après l'équation de l'axe neutre, ce dernier coupe les axes *zz* et *yy* aux points :

$$y = 0 \quad , \quad z_{AN} = -\frac{i_y^2}{z_p}$$

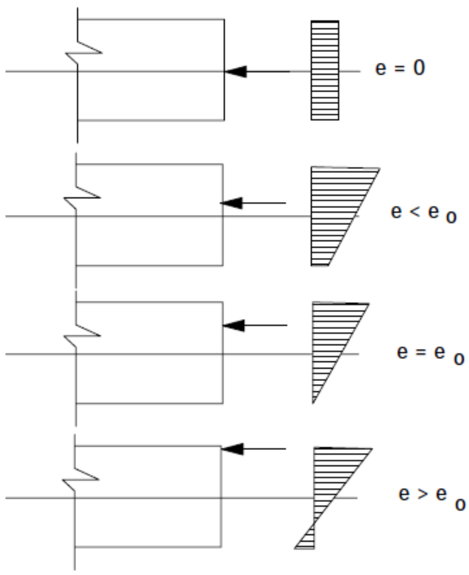
Et

$$z = 0 \quad , \quad y_{AN} = -\frac{i_z^2}{y_p}$$

Donc l'axe neutre coupe les axes du quadrant opposé de celui du point d'application de la force.

Le noyau central

D'après l'équation de l'axe neutre l'étendu de la partie de la section comprimée ou tendue dépend de l'excentricité de la force. Il est donc d'un grand intérêt pratique d'éviter dans la section droite le développement des contraintes de traction dues à la force compressive excentrique pour assurer la résistance des barres en matériau fragile à la traction. On appelle noyau central de section la partie du plan de la section droite contenant le centre de gravité et limitée par un contour fermé, dans lequel la force appliquée provoque des contraintes de même signe en tous les points de la section droite.



Le contour du noyau central de la section est déterminé par l'ensemble des positions des points d'application de la force excentrée qui fait passer l'axe par tous les points tangents à la section de telle manière qu'elle ne le coupe nulle part.

Les coordonnées des points d'application de la force sont déterminées d'après les formules suivantes :

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_{AN}} \qquad , \qquad z_P = -\frac{i_y^2}{z_{AN}}$$

Ces formules traduisent la relation entre la position de l'axe neutre et le point d'application de la force. Quand l'axe neutre tourne par rapport à un point fixe y0 et z0, le point d'application de la force se déplace suivant une ligne droite PP ne passant pas par le centre de gravité de la section.

Pour le cas d'un rectangle par exemple quand l'axe neutre est coïncidant avec

AB : l'axe neutre coupe l'axe y-y à $y_{AN} = y_0 = \frac{h}{2}$ et ne coupe pas l'axe z-z

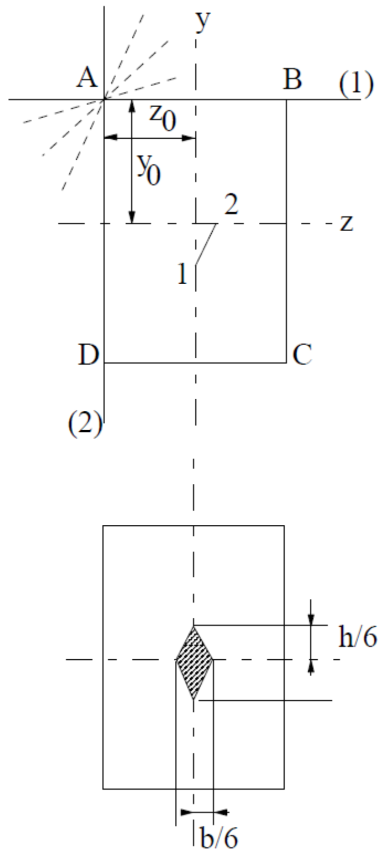
($Z_{AN} = \infty$).

Les coordonnées du point d'application de la force correspondante à cette position de l'axe neutre sont déterminées par :

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_{AN}} = -\frac{h}{6}$$

$$\text{car} \quad i_z^2 = \frac{I_z}{S} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$$

$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_{AN}} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0$$



D'une manière analogue on détermine les coordonnées du point 2 qui correspond à une position de l'axe neutre coïncidente avec AD, et on trouve

$y_P = 0$ et $y_P = b/2$

La liaison des deux points 1 et 2 correspond à la rotation de l'axe neutre au point (zo, yo) passant de la position AB à AD.

Le contour du noyau central de la section rectangulaire est un losange dont les deux autres points 3 et 4 sont déterminés de la même manière que précédemment, c'est à dire quand l'axe neutre passe de BA à AD et de AD à DC.

4.1.3) Vérification à la résistance

Pour une section symétrique, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma = \frac{F}{S} \pm \frac{M_Z}{W_Z} \pm \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma] \tag{4.4}$$

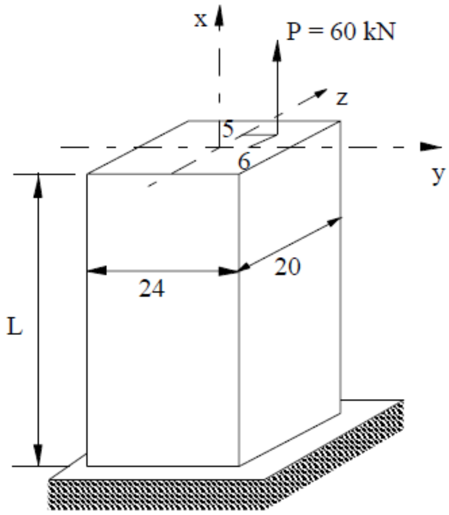
Ou pour le cas d'un effort normal excentré :

$$\sigma = \frac{F}{S}\left(1 \pm \frac{z_P}{i_y^2} z_{max} \pm \frac{y_P}{i_z^2} y_{max}\right) \leq [\sigma] \tag{4.5}$$

4.1.4) Application

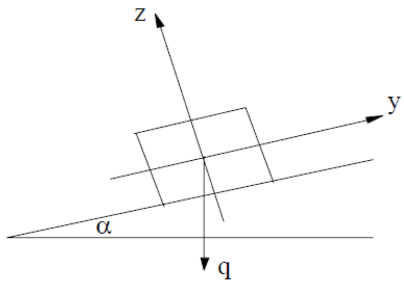
1/ Déterminer les contraintes normales σ_{max} et σ_{min} et la position de l'axe neutre dans la section dangereuse de la poutre ci-dessous :

2/ Si les angles que forme P avec les axes x-x, y-y et z-z sont 30°, 60° et 90° respectivement, déterminer la longueur L maximale de la poutre pour que la contrainte normale maximale ne dépasse pas celle provoquée par la force excentrée.

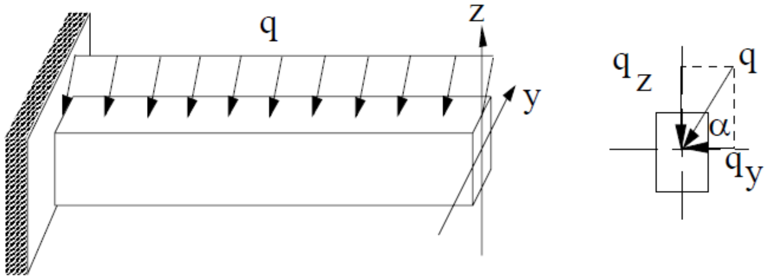


4.2 FLEXION DEVIEE

La flexion déviée est le résultat de l'action des forces extérieures agissant suivant un plan différent de ceux des axes principaux de la poutre. Par exemple une panne d'une toiture inclinée soumise à une charge verticale.



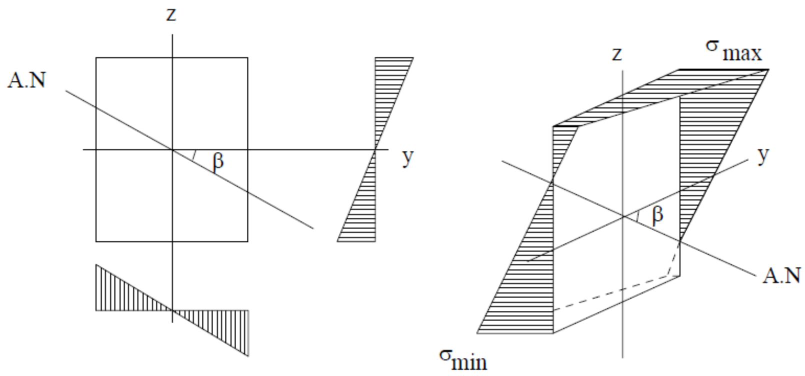
L'étude de la flexion déviée revient à décomposer les sollicitations en deux flexions planes suivant les plans principaux.



Pour une action simultanée de My et Mz, les contraintes en un point de coordonnées y et z se déterminent par la formule :

$$\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} z + \frac{M_Z}{I_Z} y \qquad (4.6)$$

Ce résultat est établi directement en considérant que la flexion déviée comme la somme de deux flexions dirigées suivant les axes centraux d'inertie et en appliquant le principe de superposition.



L'axe neutre, défini par σ = 0, a pour équation:

$$\Rightarrow \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} z \qquad (4.7)$$

En flexion déviée due à une charge inclinée de α par rapport à l'axe oy on a les relations :

$$M_y = M\cos\alpha$$

$$M_z = M\sin\alpha$$

Où M est le moment suivant un axe orienté de α par rapport à y-y.

La tangente de l'axe neutre s'écrit alors:

$$\mathrm{tg}\beta = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} = -\mathrm{ctg}\alpha \frac{I_z}{I_y} \qquad (4.8)$$

Et l'expression (1.6) peut être mise sous la forme:

$$\Rightarrow \sigma = M\left(\frac{Z\cos\alpha}{I_y} + \frac{Y\sin\alpha}{I_z}\right) \qquad (4.9)$$

4.2.1 Vérification à la résistance

Le calcul de vérification de la résistance s'effectue à la base des données sur la contrainte totale maximale.

D'après la formule (1.6) les contraintes maximales se localisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre. Pour une section symétrique on a:

$$\sigma_{max} = \left| M_{max}\left(\frac{Y_{max}\sin\alpha}{I_Z} + \frac{Z_{max}\cos\alpha}{I_Y}\right)\right| \leq [\sigma_+] \qquad (4.10)$$

$$\sigma_{min} = -\left| M_{max}\left(\frac{Y_{max}\sin\alpha}{I_z} + \frac{Z_{max}\cos\alpha}{I_y}\right)\right| \leq [\sigma_-] \qquad (4.11)$$

4.2.2 Application 2

Calculer la variation de la contrainte due à une déviation de la charge de 2°.

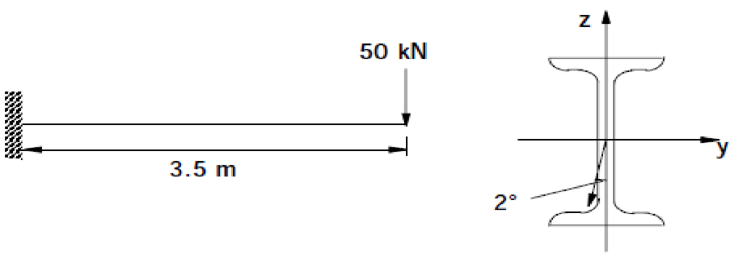
Considérons le cas d'une console en IPE600 de longueur L = 3.5 m et ayant les caractéristiques géométriques suivantes:

$I_Z = 118.3 \times 10^7 mm^4$

$I_Y = 4520 \times 10^4 mm^4$

$h = 610mm$

$b = 224mm$



La poutre est sollicitée par une charge P = 50 kN appliquée à son extrémité libre. Calculer la variation de la contrainte pour une déviation de P de 2° par rapport à l'axe z-z .