Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf –Mila

Résistance des Matériaux 2

Chapitre 3:

Théorèmes généraux des systèmes élastiques (Applications)

LECHEHEB. M

3.1 GÉNÉRALITÉS

La notion d'énergie, et en particulier d'énergie de déformation conduit à des solutions élégantes et rapides en résistance des matériaux :

-soit pour déterminer des déplacements des points de la poutre,

-soit pour donner des relations complémentaires dans le cas d'un système hyperstatique.

Dans ce chapitre seront examinées les relations qui existent entre les sollicitations agissant sur un système et les déplacements qu'elles produisent.

Les systèmes considérés sont généralement plans (géométrie et chargement) mais les développements théoriques s'appliquent à tous les systèmes, sauf précision contraire.
Pour garder à la théorie toute sa généralité, tout en simplifiant autant que possible les notations, nous désignerons une sollicitation par F (sollicitation généralisée), que ce soit une force P, un couple C ou une sollicitation globale F (F1, F2, …, Fn) et un déplacement par δ (déplacement généralisé), que ce soit une translation λ (déplacement linéaire) ou une rotation γ (déplacement angulaire).

3.2 TRAVAIL DES FORCES EXTÉRIEURES ET ÉNERGIE DE DÉFORMATION

3.2.1 Notions de travail et de travail complémentaire

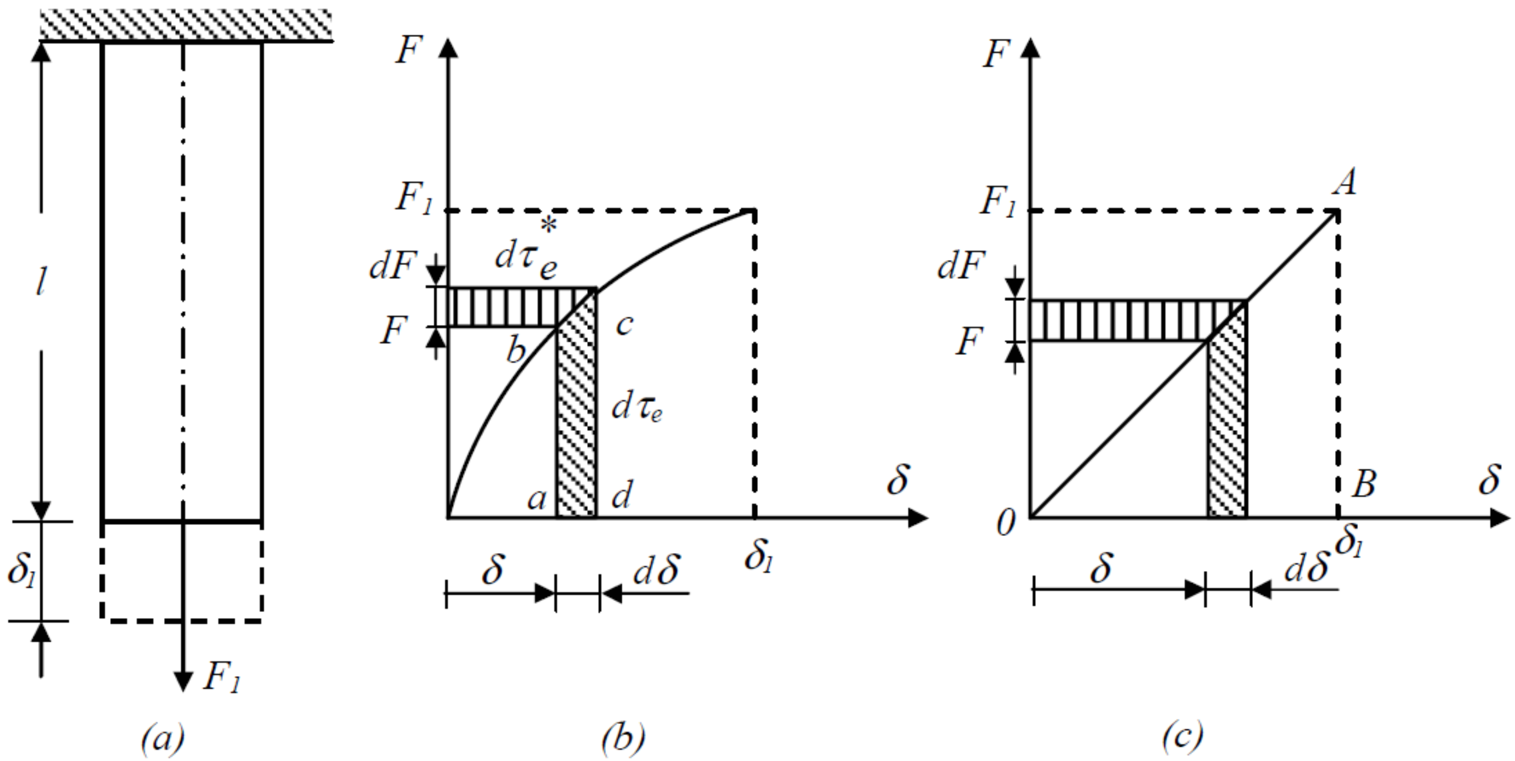
Pour fixer les idées, nous considérons le cas d'une barre prismatique soumise à une traction axiale F_1 qui produit un allongement d_1 (Figure 3.1a).

Nous supposons que la force F_1 est appliquée graduellement, d'une manière lente, de façon à ne produire aucune force d'inertie. Dans ces conditions, on dit que le chargement (force F_1 ici) est appliqué ***statiquement*** et le déplacement engendré (ici un allongement) est relié à la force appliquée par une relation représentée par le diagramme *"F-δ"* de la figure 3.1b.

Soit F une valeur intermédiaire et δ l'allongement correspondant. A un accroissement dF de la charge correspond un allongement supplémentaire $d\delta$. Le *travail élémentaire* produit par F au cours de l'accroissement $d\delta$ est défini par :

$$d\tau_e = F d\delta \qquad (3.1)$$

Il est représenté par l'aire hachurée (hachures inclinées) du diagramme F-δ (Figure 3.1b).



Remarque : $Fd\delta$ représente plus exactement le rectangle "abcd". Autrement dit, le travail effectué par dF au cours du déplacement $d\delta$, qui est un infiniment petit d'ordre supérieur à 1, est négligé.

Le travail total effectué par la force F_1 au cours du déplacement δ_1 est obtenu par sommation des travaux élémentaires, c'est-à-dire :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} F d\delta \qquad (3.2)$$

Il est représenté par l'aire délimitée par la courbe F-δ et l'axe des δ jusqu'à δ_1.

De même, on appelle *travail complémentaire élémentaire* du déplacement δ au cours de l'accroissement de charge dF la quantité :

$$d\tau_e^* = \delta dF \qquad (3.3)$$

Le travail complémentaire total effectué par F_1, appliquée graduellement de 0 à F_1, au cours du déplacement d_1 est donné par :

$$\tau_e^* = \int_0^{F_1} \delta dF \qquad (3.4)$$

C'est l'aire à gauche de la courbe F-δ.

3.2.2 Énergie et énergie complémentaire de déformation

Considérons un corps soumis à des sollicitations extérieures. Sous l'action des charges extérieures, le corps se déforme et les efforts internes (contraintes) effectuent un travail qui s'oppose au travail des sollicitations extérieures.

Ce travail interne, changé de signe, est désigné par ***énergie potentielle*** de ***déformation*** (W) ($-\tau_i = W$).

Isolons un élément $\boldsymbol{dv = dxdydz}$ du corps considéré. L'énergie élémentaire emmagasinée dans dv se calcule comme le travail effectué par les forces agissant sur les faces de l'élément dv.

Ainsi, le travail effectué par la force élémentaire $\sigma_x.dydz$ au cours de la variation $d\varepsilon_x$ de la déformation ε_x, qui produit le déplacement $\Delta dx = d\varepsilon_x.dx$, vaut :

$$dW = \sigma_x.dydz.d\varepsilon_x dx = \sigma_x d\varepsilon_x dv$$

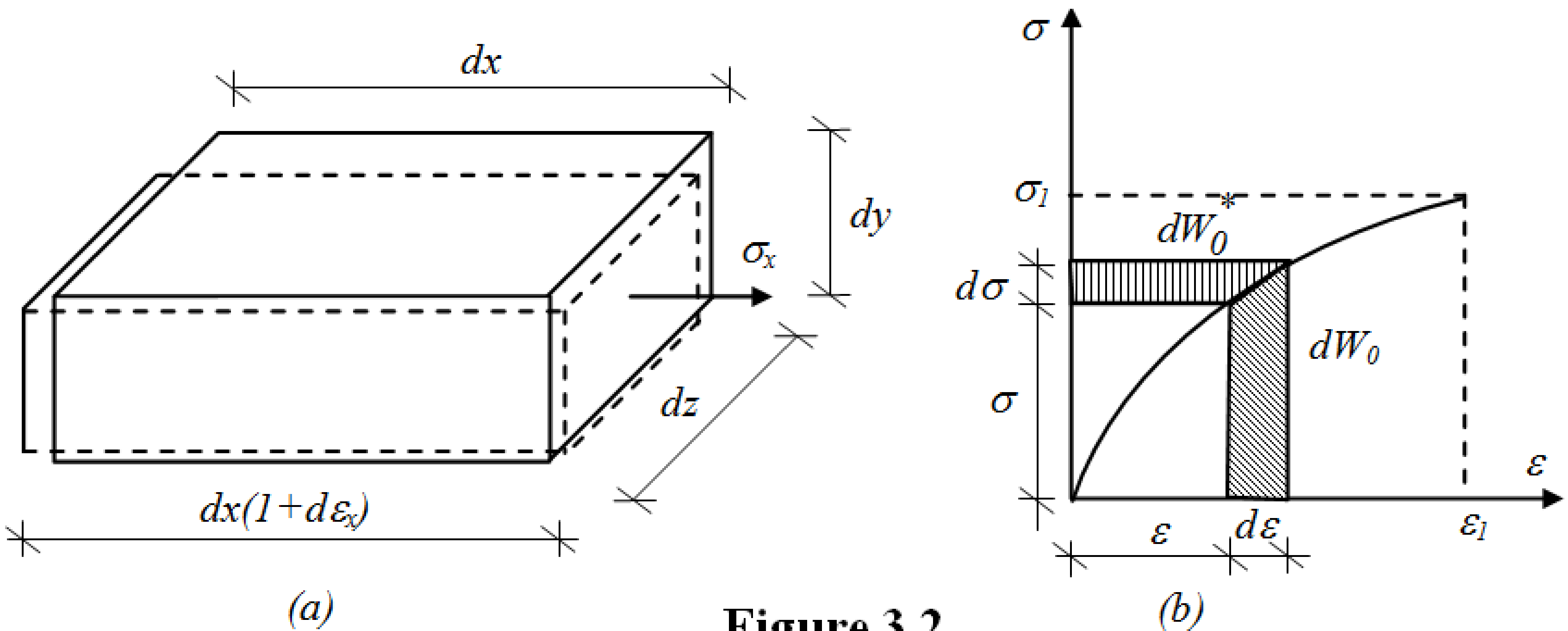


Figure 3.2

En considérant toutes les composantes des contraintes et en utilisant la notation indicielle, on obtient pour l'élément *dv :*

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \qquad (3.6)$$

L'énergie emmagasinée dans tout le volume du corps (*v*) *vaut :*

$$W = \int_v \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \qquad (3.7)$$

Considérons un diagramme contrainte-déformation unidirectionnel (unidimensionnel) (Figure 3.2b).

On a :

$$dW_0 = \sigma d\varepsilon \qquad (3.8)$$

Cette quantité a l'unité d'une énergie par unité de volume. L'intégrale :

$$W_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \qquad (3.9)$$

est appelée *densité de l'énergie de déformation* et est représentée par l'aire comprise entre la courbe σ-ε et l'axe des ε. Remarquons qu'on a :

$$W = \int_v dW_0 dv \qquad (3.10)$$

De même, l'énergie complémentaire élémentaire produite par un accroissement $d\sigma_{ij}$ des contraintes au cours des déplacements produits par les déformations ε_{ij} correspondantes vaut :

$$dW^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \qquad (3.11)$$

Et pour la totalité du volume du corps :

$$W^* = \int_v \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \qquad (3.12)$$

On a aussi :

et $$dW_0^* = \varepsilon d\sigma \quad \text{et} \quad W_0^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma \qquad (3.13)$$

4.3 TRAVAIL ET ÉNERGIE DANS LE DOMAINE ÉLASTIQUE LINÉAIRE

a) Travail d'une force

Revenons au cas de la traction d'une barre prismatique du paragraphe 3.2.1. Si la relation entre F et δ est linéaire, domaine d'application de la loi de Hooke (et petits déplacements), c'est-à-dire quand on a à tout moment du chargement la relation (Figure 3.1c) : $\boldsymbol{F = k\delta}$ (k = constante)

Le travail total devient : $\tau_e = \int_0^{\delta_1} k\delta d\delta = \frac{1}{2} k\delta_1^2$

et comme : $F_1 = k\delta_1$, il vient :

$$\tau_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_1 \tag{3.14}$$

Le travail total est représenté par l'aire du triangle *OAB* (Figure 3.1c).

Remarquons que dans le cas de l'élasticité linéaire, on a : $\tau_e = \tau_e^*$

b) Généralisation

Si un système en équilibre est soumis à une sollicitation globale $F\ (F_1, F_2,\ldots F_i,\ldots,F_n)$ et que les points d'application de ces forces subissent des déplacements, dont les projections sur les directions de ces mêmes sollicitations valent δ_1, $\delta_2,\ldots,\ \delta_n$, le travail effectué au cours du chargement du système (passage de l'état d'équilibre initial à l'état d'équilibre final), vaut :

$$\tau_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i \tag{3.15}$$

Il faut rappeler qu'on suppose que :

- le chargement est statique (les mises en charge sont lentes),
- le matériau a un comportement élastique linéaire (loi de Hooke vérifiée),
- les déplacements n'affectent pas l'action des charges (hypothèse des petits déplacements, pas d'effets du second ordre).

3.4 TRAVAIL DE DÉFORMATION DES SOLLICITATIONS SIMPLES DANS LE CAS DES POUTRES

Nous allons calculer séparément le travail de déformation (énergie de déformation) en fonction des efforts N, M, T et M_t dans une poutre (droite ou courbe) de longueur l. Considérons un tronçon de poutre dx (ds) suffisamment petit pour pouvoir admettre que les efforts ne varient pas sur dx.

a) Effort normal

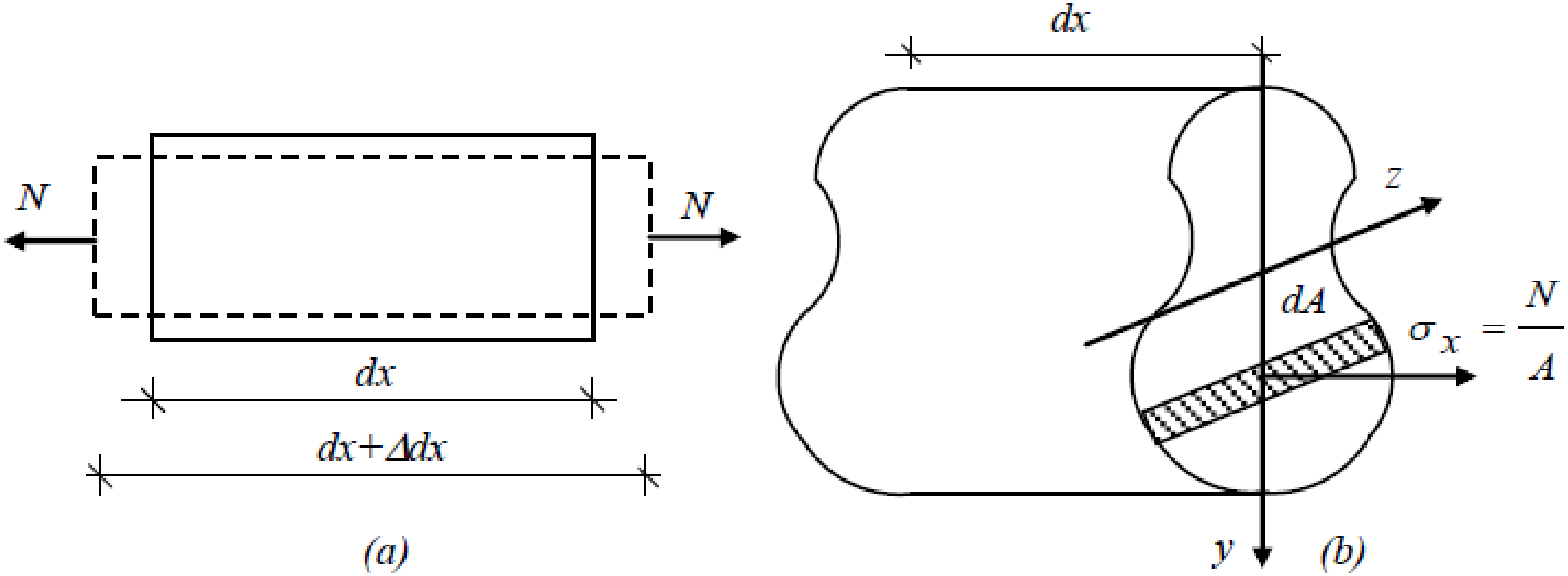


Figure 4.4

Sous l'effet des contraintes d'effort normal, le tronçon ***dx*** *subit une variation de longueur* □***dx*** *définie par :*

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \Rightarrow \Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx$$

Comme dans le cas de l'effort normal on a $\sigma_x = N/A$, il vient :

$$\Delta dx = (N/EA)dx$$

L'énergie emmagasinée dans le couche $dA.dx$ se calcule comme le travail effectué par la force $\sigma_x.dA$ au cours du déplacement Δdx, d'où :

$$d^2W = \frac{1}{2}(\sigma_x dA)\Delta dx = \frac{1}{2}(\frac{N}{A}dA)\frac{N}{EA}dx = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA^2}dAdx$$

<u>Remarque</u> : La notation *d2W est utilisée pour désigner une quantité plus petite que l'énergie élémentaire.*

L'énergie élémentaire emmagasinée dans le tronçon *dx s'obtient par intégration sur l'aire A de la section :*

$$dW = \frac{dx}{2}\int_A \frac{N^2}{EA^2} dA = \frac{1}{2}\frac{N^2 dx}{EA^2}\int_A dA = \frac{N^2}{2EA} dx$$

Et pour la totalité de la poutre :

$$W = \frac{1}{2}\int_l \frac{N^2}{EA} dx \qquad (3.16)$$

b) Moment fléchissant

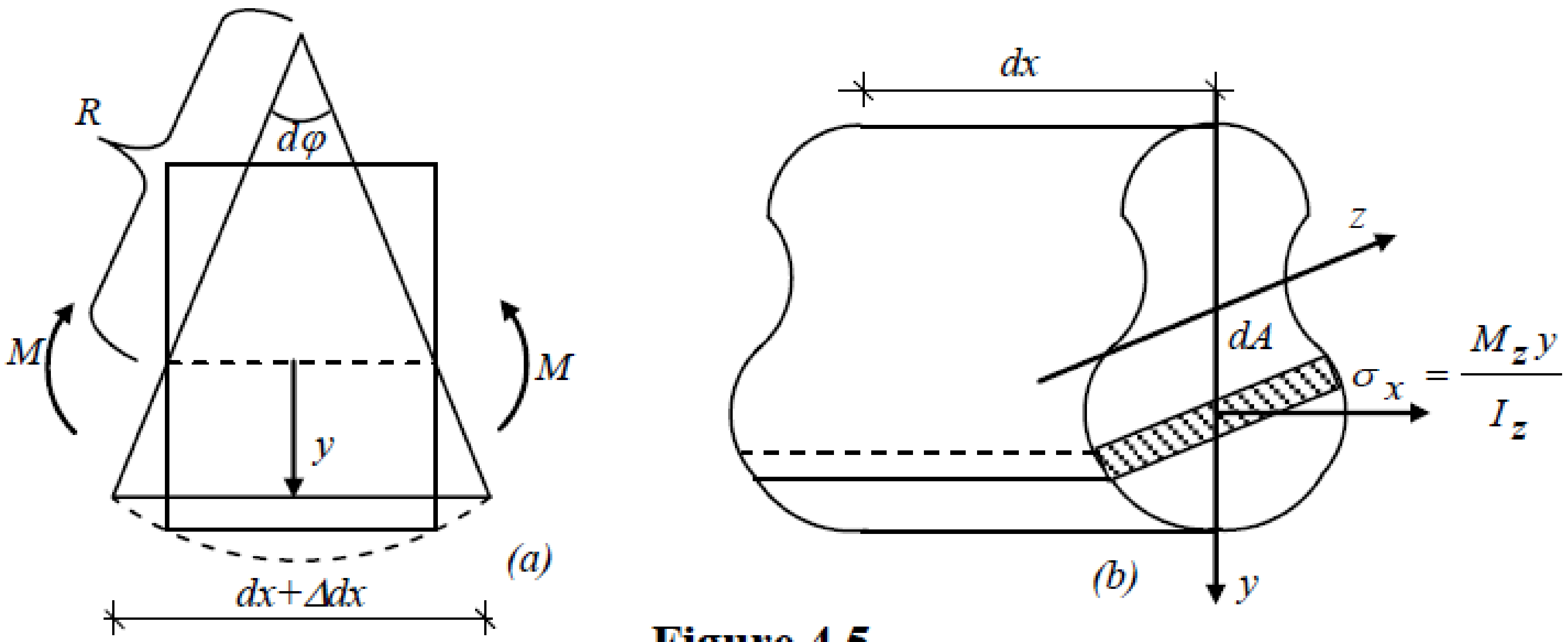


Figure 4.5

Considérons la couche *dAdx*. *Sous l'effet des contraintes de flexion, la couche subit une variation de longueur :* $\Delta dx = \varepsilon_x dx = (\sigma_x / E) dx$. *Compte tenu de la relation de Navier, il vient :*

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \Rightarrow \Delta dx = \frac{M_z y}{E I_z} dx$$

L'énergie emmagasinée dans la couche *dAdx vaut :*

$$d^2 W = \frac{1}{2}(\sigma_x dA)\Delta dx = \frac{1}{2}(\frac{M_z y}{I_z} dA)\frac{M_z y}{E I_z} dx = \frac{1}{2}\frac{M_z^2 y^2}{E I_z^2} dA dx$$

En intégrant sur la surface on obtient l'énergie emmagasinée dans le tronçon *dx :*

$$dW = \frac{dx}{2}\int_A \frac{M_z^2 y^2}{E I_z^2} dA = \frac{1}{2}\frac{M_z^2 dx}{E I_z^2}\int_A y^2 dA = \frac{M_z^2}{2 E I_z} dx$$

D'où l'énergie de déformation de la poutre, qui se calcule par intégration sur *l* :

$$W = \frac{1}{2}\int_l \frac{M_z^2}{EI_z}\,dx \qquad (3.17a)$$

Dans le cas d'une flexion gauche, on a une relation similaire à (3.17a) pour chaque moment fléchissant et pour les deux moments on aura :

$$W = \frac{1}{2}\int_l \left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y}\right)dx \qquad (3.17a)$$

c) Effort tranchant

L'énergie emmagasinée dans un tronçon *dx soumis à un effort tranchant Ty vaut :*

$$dW = \frac{\kappa_y T_y^2}{2GA} dx$$

Et pour toute la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa_y T_y^2}{GA} dx$$

Si la poutre est soumise à *Ty et Tz on aura :*

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{\kappa_y T_y^2}{GA} + \frac{\kappa_z T_z^2}{GA} \right) dx \qquad (3.18)$$

d) Moment de torsion

L'angle dont tourne l'une par rapport à l'autre les sections extrêmes du tronçon *dx* soumis à un moment de torsion M_t est donné par (Figure 4.6) :

$$d\varphi_t = \frac{qM_t}{GI_P}dx$$

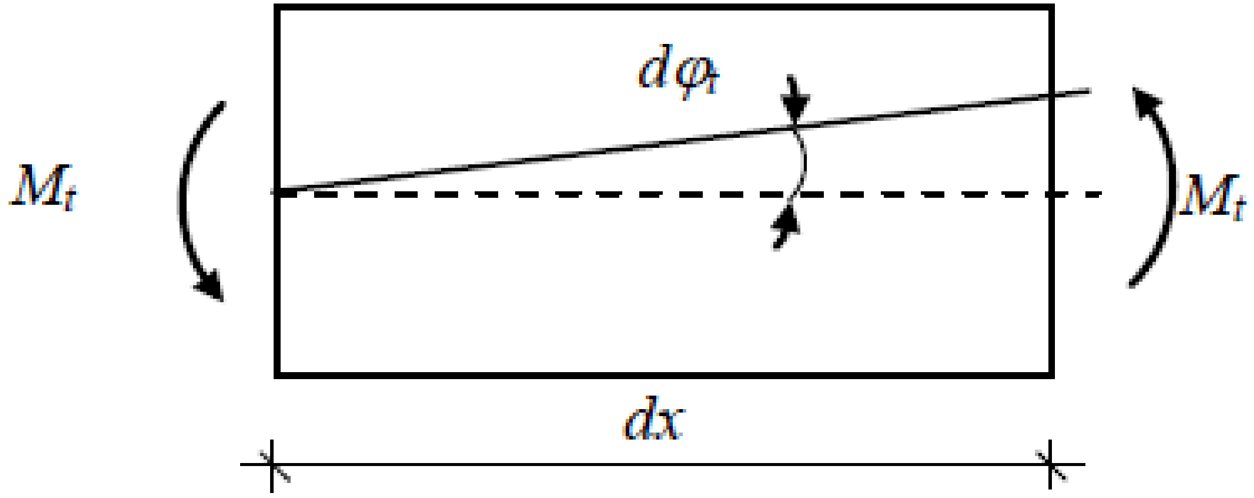


Figure 4.6

- q est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section, appelée coefficient de torsion (*q ≈ 40Ip2/A4). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.*

- la quantité *C = GIp/q est désignée par rigidité à la torsion (ou rigidité torsionnelle).*

L'énergie emmagasinée dans le tronçon *dx se calcule comme le travail effectué par Mt lors du déplacement d* φ_t *:*

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{q M_t^2}{2 G I_P} dx$$

Et pour l'ensemble de la poutre $W = \frac{1}{2} \int_l \frac{q M_t^2}{G I_P} dx$ (3.19)

3.6 EXPRESSION GÉNÉRALE DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE DE DÉFORMATION

Isolons à l'intérieur d'un corps élastique un élément $dv = dxdydz$ suffisamment petit pour pouvoir admettre que les contraintes ne varient pas sur les facettes de l'élément.

Calculons l'énergie emmagasinée dans l'élément dv lorsqu'il est soumis à l'ensemble des contraintes (Figure 3.7a).

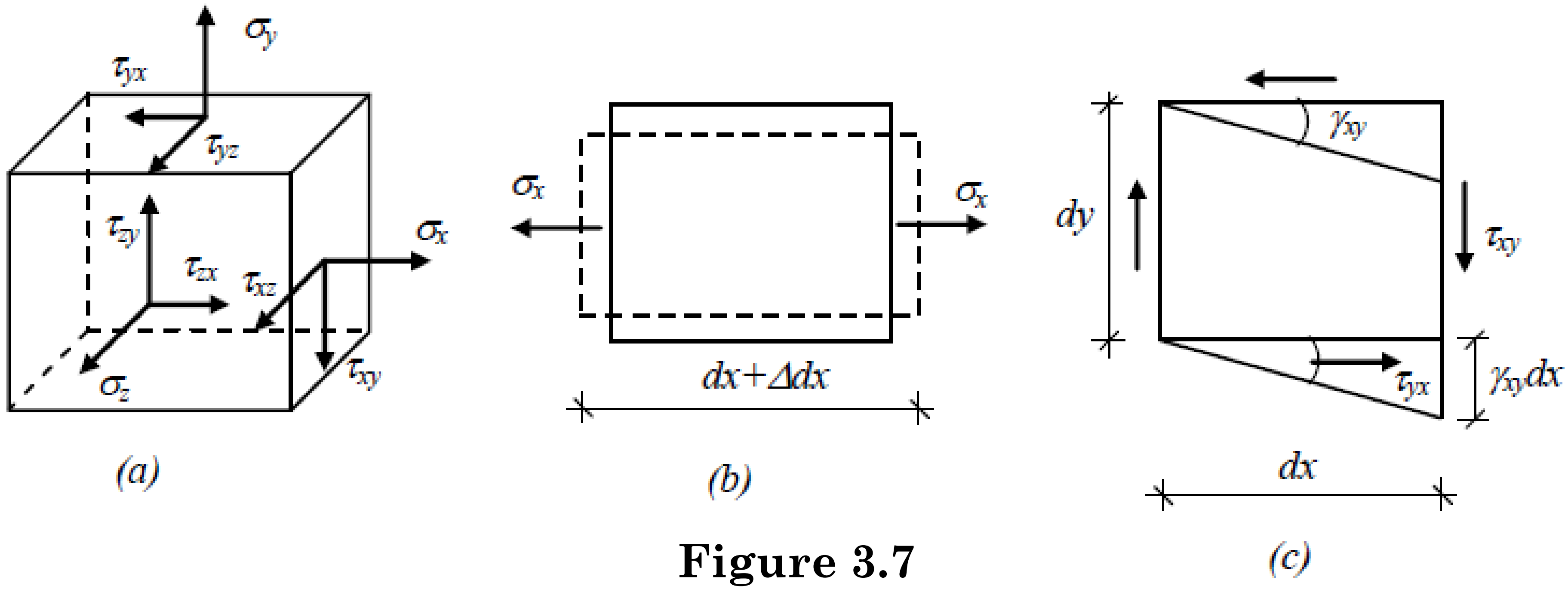


Figure 3.7

Le travail de déformation de la force $\sigma_x dydz$ *au cours du déplacement* $\Delta dx = \varepsilon_x dx$ *(Figure 3.7b) vaut :*

$$dW = \frac{1}{2}(\sigma_x dydz)\varepsilon_x dx = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dxdydz$$

Pour l'ensemble des trois contraintes normales, on applique le résultat (3.15), d'où :

$$dW = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z)dxdydz$$

où ε_x, ε_y et ε_z sont les déformations longitudinales et peuvent être exprimées en fonction des contraintes normales à partir de la loi de Hooke généralisée.

Les déformations provoquées par les contraintes normales et tangentielles étant indépendantes, si outre les contraintes normales il y a des contraintes tangentielles, il suffit d'ajouter leur effet.

Le travail de la force $\tau_{xy} dydz$ lors du déplacement $\gamma_{xy} dx$ (Figure 3.7c) vaut :

$$dW = \frac{1}{2}(\tau_{xy} dydz)\gamma_{xy} dx = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} dxdydz$$

En présence de toutes les contraintes, il vient :

$$dW = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dxdydz \tag{3.20}$$

L'énergie potentielle de déformation de tout le corps s'obtient par sommation sur le volume entier : $W = \frac{1}{2}\int_v (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dv$ **3.21**

L'expression de *W* peut être exprimée en fonction des contraintes seulement ou des déformations uniquement en utilisant les expressions des contraintes en fonction des déformations données par la loi de Hooke généralisée.

Dans le cas d'une poutre soumise aux sollicitations N, M, T et M_t, l'expression de W s'obtient en ajoutant les expressions (3.16), (3.17), (3.18) et (3.19) :

$$W = \frac{1}{2}\int_l \frac{M^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\int_l \frac{N^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\int_l \frac{\kappa T^2}{GA}dx + \frac{1}{2}\int_l \frac{qM_t^2}{GI_P}dx \qquad \textbf{3.22}$$

3.8 THÉORÈME DE CASTIGLIANO

3.8.1 Première forme du théorème

Considérons un système élastique soumis à une sollicitation F $(F_1, F_2,\ldots, F_n)$. Au cours de la mise en charge, le système se déforme et les points d'application des forces subissent les déplacements $\delta_1, \delta_2,\ldots, \delta_n$ (δ_i mesuré suivant la direction de F_i).

L'énergie W emmagasinée dans le système au cours du chargement peut s'exprimer en fonction des forces ou des déplacements de leur point d'application (§ 3.5).

$$W = W(F_1, F_2, \ldots, F_n) = W(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \qquad \text{(a)}$$

Donnons à la force F_i un accroisement dF_i. Il s'ensuit une variation de l'énergie définie par la quantité $(\partial W/\partial F_i)dF_i$ et l'énergie totale, sous $F(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ et dF_i, s'écrit :

$$W + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i \qquad \text{(b)}$$

Etant donné que le travail des forces ne dépend pas de l'ordre dans lequel elles sont appliquées (§ 3.4), appliquons d'abord dF_i ensuite la sollicitation globale $F(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

La force infinitésimale dF_i produit un déplacement $d\delta_i$ infinitésimal aussi, si bien que le travail accompli peut être considéré comme un infiniment petit d'ordre 2 qu'il est légitime de négliger : $(1/2)\, dF_i d\delta_i \approx 0$.

Appliquons maintenant la sollicitation globale F $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Le travail τ_e accompli est égal à W (§ 3.4) : $\tau_e = W$. En outre, la force dF_i, dont le point d'application a subi un déplacement δ_i, produit un travail qui vaut $dF_i\delta_i$.

D'où le travail total :

$$\tau_e + dF_i\,\delta_i = W + dF_i\,\delta_i \qquad \text{(c)}$$

En vertu du résultat (4.19), les expressions (b) et (c) sont égales, d'où :

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \delta_i \qquad (3.28)$$

C'est la première forme du théorème de Castigliano, qui s'énonce comme suit :

Théorème : *Dans un système élastique à appuis indéformables* ([1]), *la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'une des forces agissant sur le système est égale à la projection sur la direction de cette force du déplacement élastique de son point d'application.*

([1]) Pour établir le résultat (3.28), nous avons appliqué dF_i et on a admis que cet accroissent n'influençait aucunement les autres forces. En d'autres termes, nous avons supposé que les forces F_1, F_2, ..., F_n étaient indépendantes. Les réactions des appuis indéformables (appuis fixes) ayant un travail nul, même si elles étaient influencées par dF_i cela ne changerait rien.

Par contre, il en va différemment avec des appuis élastiques dont les réactions dépendent des forces appliquées (donc de dF_i) et effectuent un travail. Pour que le résultat (3.28) reste applicable dans ce cas, il suffit de considérer les appuis élastiques comme faisant partie du système et de tenir compte de leur travail.

Notons aussi que le résultat (3.28) reste valable si le corps possède une énergie initiale ; elle apparaît dans (b) et (c) et se simplifie.

Exemples d'application

Exemple 1

Considérons une poutre bi-articulée de section constante chargée en son milieu par une force concentrée *P*.

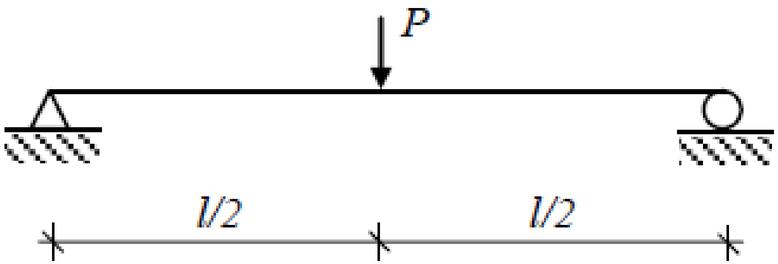


Figure 3.9

La flèche à mi-portée (*f*) s'obtient par application directe du résultat **(4.8):**

$$f = \partial W / \partial P$$

Avec :

$$W = \frac{1}{2}\int_l \frac{M_z^2}{EI_z}dx + \frac{1}{2}\int_l \frac{\kappa T_y^2}{GA}dx$$

$$W = \frac{1}{2EI_z}\left[\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx + \int_{l/2}^{l}\left(\frac{P}{2}(l-x)\right)^2 dx\right] + \frac{\kappa}{2GA}\left[\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}\right)^2 dx + \int_{l/2}^{l}\left(-\frac{P}{2}\right)^2 dx\right]$$

D'où :

$$W = \frac{P^2 l^3}{96 E I_z} + \frac{\kappa P^2 l}{8GA}$$

$$f = \frac{P l^3}{48 E I_z} + \frac{\kappa P l}{4GA}$$

3.8.2 Deuxième forme du théorème

Considérons à nouveau un corps élastique soumis à une sollicitation globale F $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, et désignons toujours par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les déplacements correspondants des forces (suivant leurs directions respectives).

Comme déjà signalé, l'énergie de déformation peut s'exprimer en fonction des déplacements des points d'application des forces. Supposons qu'après avoir appliqué le sollicitation F $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, on impose un incrément $d\delta_i$ au déplacement δ_i du point d'application de la force F_i. L'énergie totale s'exprime par :

$$W + \frac{\partial W}{\partial \delta_i} d\delta_i \qquad \text{(d)}$$

Considérons maintenant le travail total accompli lors du chargement F_1, F_2,..., F_n et suite à l'application du déplacement $d\delta_i$ au point d'application de F_i. Il s'écrit :

$$\tau_e + F_i.d\,\delta_i = W + F_i.d\,\delta_i \qquad \text{(e)}$$

En égalant les expressions (d) et (e) on tire :

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} = F_i \qquad (3.29)$$

C'est la 2ème forme du théorème de Castigliano, qu'on appelle parfois ***1er théorème de Castigliano ou théorème inverse de Castigliano.***

Remarque : Contrairement à la 1ère forme, la 2ème forme reste valable même si les déplacements ne sont pas fonctions linéaires homogènes des forces.

Théorème : *La dérivée de l'énergie de déformation, exprimée en fonction des déplacements des points sur lesquels agissent des forces extérieures, par rapport à un de ces déplacements, est égale à la force correspondante, calculée suivant la direction du déplacement*.

Exemple d'application

Le système hyperstatique ci-contre est constitué de trois barres articulées et est soumis à une force verticale P.

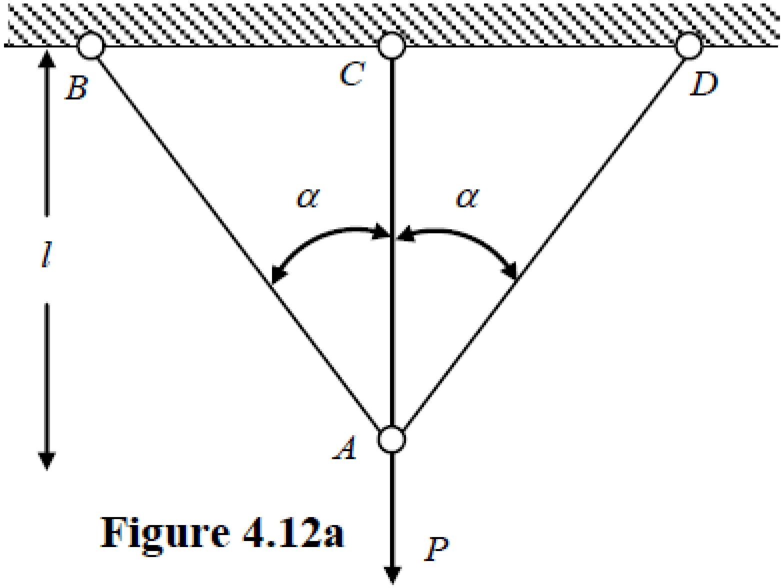


Figure 4.12a

On veut déterminer l'effort N dans la barre verticale AC en appliquant le 2ème théorème de Castigliano. Les barres sont du même matériau (E) et de même section A.

Le théorème s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial \delta} = P \qquad \text{(a)}$$

où δ est le déplacement vertical du point d'application de la force P et représente l'allongement de la barre verticale AC. Les barres étant articulées, on a :

$$W = \frac{1}{2}\frac{N_{AB}^2 l_{AB}}{EA} + \frac{1}{2}\frac{N_{AC}^2 l_{AC}}{EA} + \frac{1}{2}\frac{N_{AD}^2 l_{AD}}{EA} \quad \text{(b)}$$

Par raison de symétrie on a : $\boldsymbol{N_{AB} = N_{AD} = N_1}$.

Posons aussi $\boldsymbol{N_{AC} = N}$.(de même que $\boldsymbol{\delta_1=\delta_2}$).

De plus, $\boldsymbol{l_{AC} = l}$ ***et*** $\boldsymbol{l_{AB}= l_{AD} = l/\cos\alpha}$.

La relation entre les allongements des barres verticale et inclinées (Figure 3.12b) s'écrit :

$$\delta_1=\delta\cos\alpha$$

En vertu de la loi de Hooke on a :

$$\boldsymbol{\sigma = \varepsilon E = N/A \Rightarrow N = \varepsilon EA}$$

Comme $\boldsymbol{\varepsilon = \delta/l}$, il vient :

$$\boldsymbol{N = \delta EA/l} \tag{c}$$

Et par particularisation : $\boldsymbol{N_1 = \delta_1 EA/l_1}$ avec : $\boldsymbol{\delta_1 = \delta \cos\alpha}$ et $\boldsymbol{l_1 = l/\cos\alpha}$, d'où :

$$\boldsymbol{N_1 = (\delta EA \cos^2\alpha)/l}$$

En remplaçant dans l'équation (b) N_1 et N par leur expression, on obtient :

$$W = \frac{EA\delta^2}{2l}(1 + 2\cos^3\alpha) \tag{d}$$

Puis, d'après l'équation (a), il vient :

$$\boldsymbol{EA\delta(1+2\cos^3\alpha/l)=P}$$

et en vertu de (c), on obtient : $N(1+2\cos^3\alpha)=P$

D'où :

$$N = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}$$

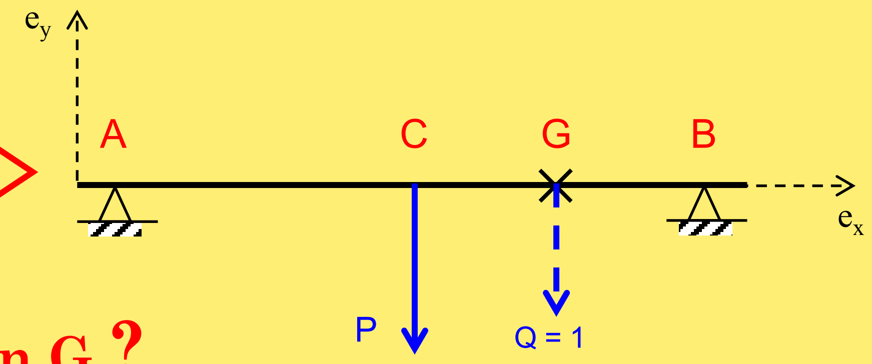
L'effort N connu, le système devient isostatique et pour calculer N_1 il suffit d'écrire une équation d'équilibre de translation ou .

Méthode de la force fictive généralisée

Le théorème de Castigliano permet de calculer le déplacement du point de la structure confondu avec le point d'application d'une force concentrée (P ou C). Pour calculer le déplacement d'un point quelconque du système projeté sur une direction quelconque, on applique au point considéré, dans la direction considérée, une force auxiliaire (fictive) qu'on annule à la fin des calculs.

Calcul du déplacement d'un point non chargé

Poutre sur 2 appuis



Flèche en G ?

- détermination de l'équation de la déformée

- charge fictive unitaire Q travaillant dans le déplacement $U_y(G)$

Théorème de CASTIGLIANO

$$\boxed{\left(\frac{\partial W_d}{\partial Q}\right)_{Q=0} = U_y(G)}$$

Exemple

Soit à calculer le déplacement angulaire de l'extrémité libre d'une poutre console de section constante soumise à une charge répartie uniforme (Figure 3.13). L'influence de T étant négligeable, on ne tient compte que de M.

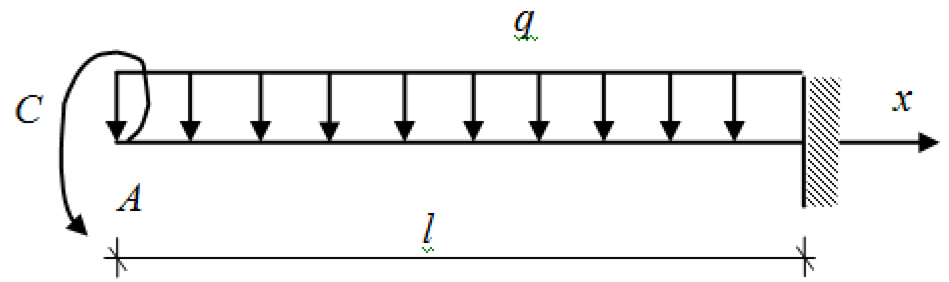


Figure 3.13

Pour calculer la rotation demandée, on applique un couple auxiliaire C en A afin de pouvoir utiliser le théorème de Castigliano.

$$\gamma_A = \frac{\partial W}{\partial C}\Big|_{C=0}$$

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2 dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l \left(-(C+\frac{qx^2}{2})\right)^2 dx = \frac{1}{2EI}(C^2 l + \frac{Cql^3}{3} + \frac{q^2 l^5}{20})$$

$$\frac{\partial W}{\partial C} = \frac{1}{2EI}\left(2Cl + \frac{ql^3}{3}\right) \quad \text{d'où :} \quad \gamma_A = \frac{\partial W}{\partial C}\Big|_{C=0} = \frac{ql^3}{6EI}$$