



**Chapitre 2 :**

**DÉPLACEMENT DES POUTRES  
SYMÉTRIQUES EN FLEXION  
PLANE**

## **INTRODUCTION :**

Les poutres considérées sont droites et possèdent un plan de symétrie qui contient les charges appliquées. Dans ces conditions, la flexion se fait dans le plan de symétrie de la pièce considérée.

Ce chapitre expose les principales méthodes qui permettent d'obtenir l'équation de la déformée.



## 2.1 IMPORTANCE DES CALCULS DE DÉPLACEMENTS

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements. Généralement, on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les contraintes. Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

Le déplacement de la section d'une poutre peut être :

- ✓ une translation
- ✓ une rotation

Dans le cas d'une poutre horizontale fléchie dans le plan  $xy$ , l'axe des  $x$  étant confondu avec l'axe longitudinal de la pièce, les déplacements verticaux des centres de gravité des sections droites, mesurés à partir de l'axe  $x$ , sont appelés flèches. Les rotations se font autour de l'axe  $z$  (axe neutre) et représentent les angles, mesurés en radians, dont tournent les sections droites de la poutre.

## 2.2 EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA LIGNE ELASTIQUE:

L'expression de l'équation de la déformation peut être facilement obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (1)$$

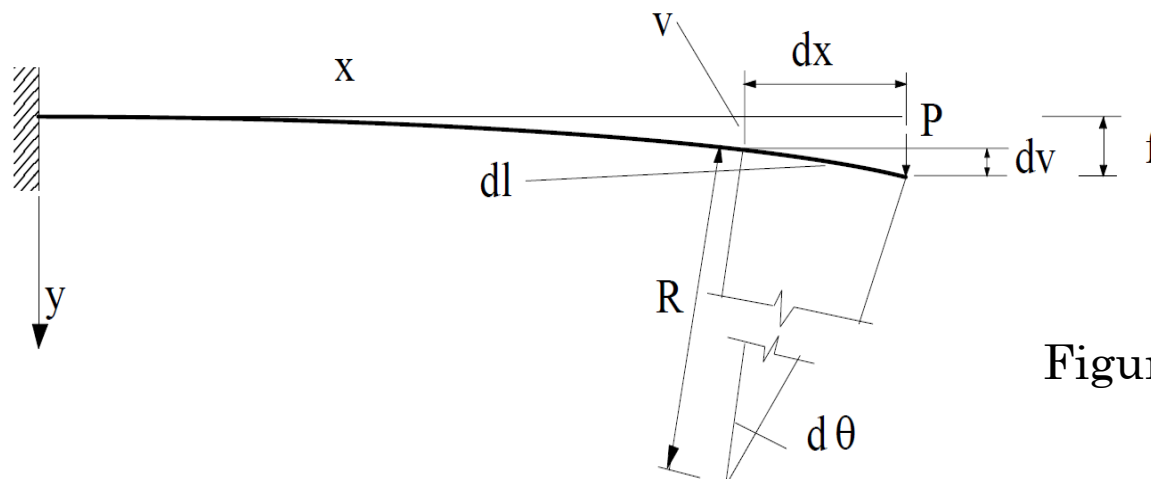


Figure 1

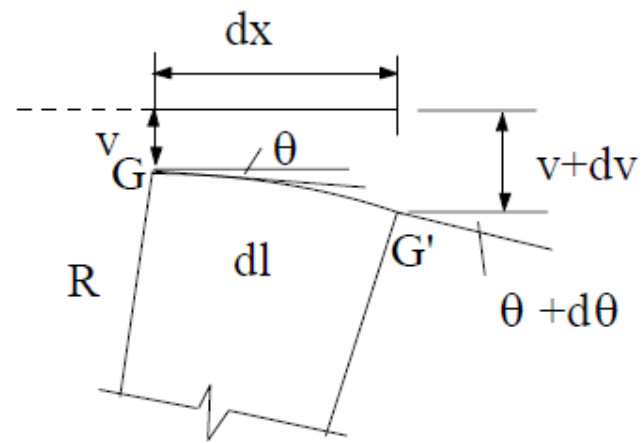
L'arc  $GG'$  ayant pour longueur  $dl$ :  $dl = R d\theta$  (2)

ou  $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dl}$  (3)



La tangente de la courbure  $v$  au point  $x$  est défini par :

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \theta \quad (4)$$



Pour des angles de rotations très petits. on assimile :

$$\operatorname{tg} \theta = \theta \quad (5)$$

$$\text{et } dl = dx \quad (6)$$

En remplaçant (5) et (6) par leurs valeurs dans (3) et (4) on obtient :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \quad (7)$$

$$\text{et } \theta = \frac{dv}{dx} \quad (8)$$



En dérivant (8) par rapport à x :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (9)$$

Des équations (7) et (9), il en résulte :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (10)$$

L'équation (1) s'écrira donc :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (11)$$

C'est l'équation différentielle de la ligne élastique que l'on intègre dans chaque cas particulier afin de déterminer les flèches des poutres.

Le signe dans l'équation (11) correspond à :

- (1) x et v sont positifs vers la droite et vers le bas respectivement.
- (2) l'angle  $\theta$  est positif dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe x.
- (3) M positif quand il tend les fibres inférieures.
- (4) la courbure est positive si la courbe est concave vers le bas ( $M > 0$  et  $1/R > 0$ )

On dispose de plusieurs méthodes pour la résolution de l'équation différentielle de la déformée. Les procédures les plus utilisées seront présentées ci-après.

## 2.3.METHODES DES PARAMETRES INITIAUX

La méthode des paramètres initiaux est basée sur le principe de la fonction discontinue pour la détermination d'une expression unique du moment fléchissant d'une poutre de plusieurs tronçons. L'intégration directe de cette expression résulte en deux constantes  $C_1 = \theta_0$  et  $C_2 = v_0$  qui s'avèrent être les paramètres initiaux.

Ainsi si on prend l'origine des coordonnées aux points situés à l'extrême gauche de la poutre, les expressions de  $v(x)$  et  $\theta(x)$  sont données par les équations :

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q'_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \dots$$

$$EIv(x) = EIv_0 + EI\theta_0 \frac{x}{1!} + \sum \frac{M(x-a)^2}{2!} + \sum \frac{P(x-b)^3}{3!} + \sum \frac{q_c(x-c)^4}{4!} - \sum \frac{q_d(x-d)^4}{4!} + \sum \frac{q'_c(x-c)^5}{5!} - \sum \frac{q'_d(x-d)^5}{5!} + \dots,$$



Où :

**M** : moments concentrés extérieurs ou à l'encastrement

**a** : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments **M**

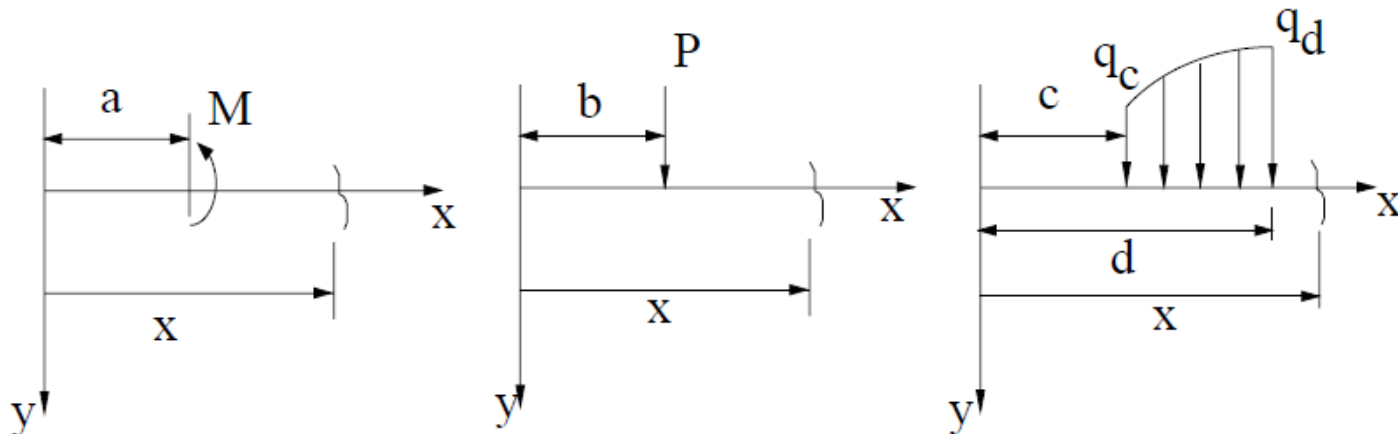
**p** : les forces concentrées y compris les réactions

**b** : distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des forces **P**

**q<sub>c</sub>**, **q<sub>d</sub>** : respectivement, les intensités au début et à la fin de la charge répartie

**q'<sub>c</sub>**, **q'<sub>d</sub>** : respectivement, les valeurs des dérivées de **q** aux points **x = c** et **x = d**

Les directions des charges sont positives comme indiquées ci-dessous :



Les deux paramètres initiaux  $v_0$  et  $\theta_0$  sont déterminés par les conditions d'appui de la poutre.





## Application

Déterminer la flèche maximale et les rotations aux appuis de la Poutre représentée sur la Fig.2.

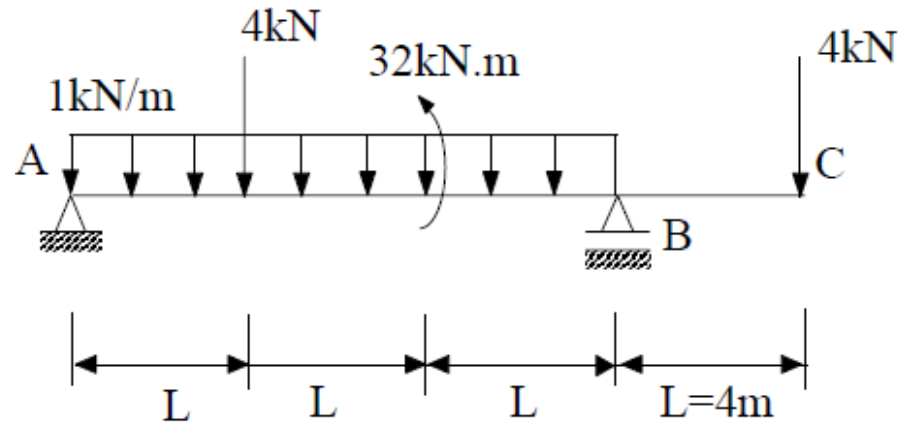


Figure 2

## Solution

Par les équations de la statique on détermine les réactions aux appuis et on trouve:  $R_A = 10 \text{ kN}$ ,  $R_B = 10 \text{ kN}$

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - \frac{10}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{(x-12)^3}{6} + 2(x-4)^2 + 32(x-8) - 5(x-12)^2$$

$$EIv(x) = EIv_0 + EI\theta_0 x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{(x-12)^4}{24} + \frac{2(x-4)^3}{3} + 16(x-8)^2 - \frac{5}{3}(x-12)^3$$

$$EIv(0) = 0 \Rightarrow EIv_0 \Rightarrow v_0 = 0$$

$$EIv(12) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{118.22}{EI}$$

$$\theta(0) = \theta_0 = \frac{118.22}{EI}$$

$$\theta(12) = -\frac{57.78}{EI}$$

La flèche maximale :

$\theta(x) = 0 \Rightarrow$  équation polynomiale de degré 3.

X	0	4	8	12	16
EI $\theta(x)$	118.22	48.89	-84.4	-57.78	-25.78

Donc  $\theta(x) = 0$  pour  $x \in ]4, 8[$

En utilisant la méthode de dichotomie, on converge vers  $x = 5.48$

$$\Rightarrow v(5.48) = +\frac{414}{EI}$$



## 2.4.Méthodes moments des aires:

La méthode des « moments d'aires » concerne la déformation des poutres en flexion, et permet de calculer la pente et la flèche d'une poutre.

La méthode des moments d'aires est une méthode par intégration géométrique permettant de calculer la déformée d'une poutre en la reliant à un diagramme  $M/EI$ .



# Méthodes moments des aires:

## Théorème 1: Variation de Pente

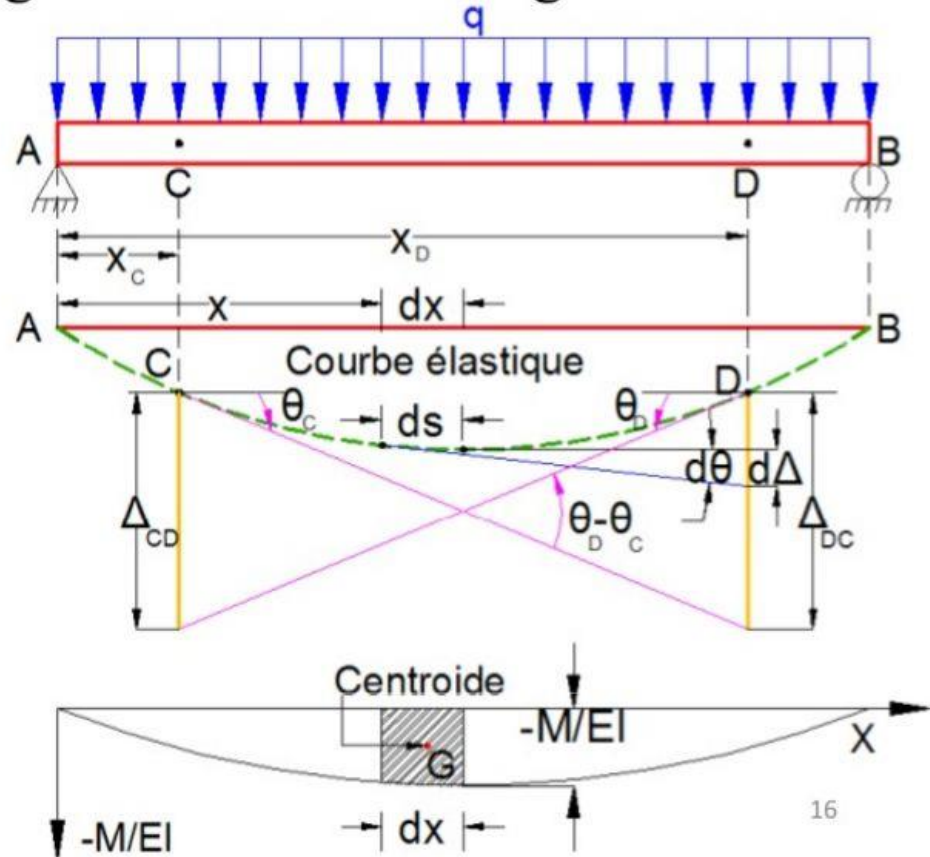
Le changement de pente entre deux points sur la courbe élastique d'une poutre est égale à l'aire de la diagramme  $(-M / EI)$  entre ces points.

$$y'' = \frac{-M}{EI} \Rightarrow \frac{d(y')}{dx} = \frac{-M}{EI}$$

$$d\theta = \frac{-M}{EI} dx$$

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{-M}{EI} dx$$

$$\theta_D - \theta_C = \text{aire} \left[ -\frac{M}{EI} \right]_{x_C}^{x_D}$$



# Méthodes moments des aires:

## Théorème2: Flèche tangentielle

La distance verticale  $\Delta$ , d'un point D sur la courbe d'élastique d'une poutre à une tangente de quelque point C, est égale au moment de la diagramme

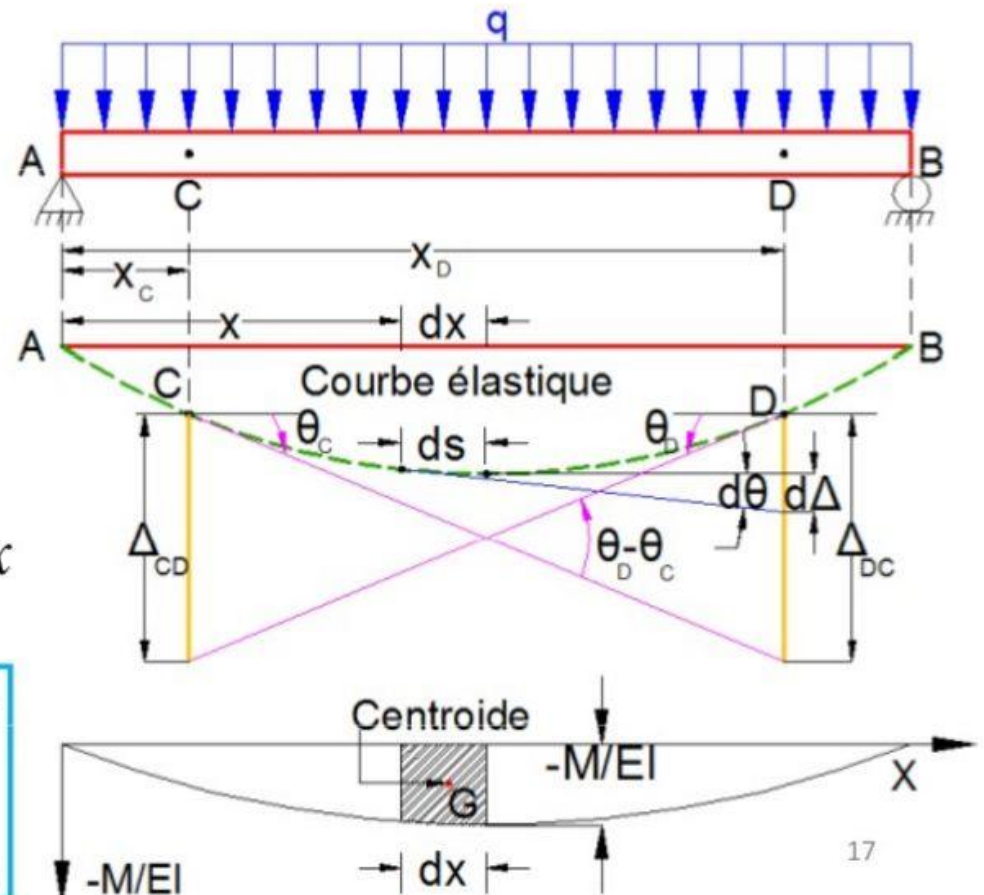
( $-M / EI$ ) entre C et D sur D.

$$d\theta \cong \text{tg}d\theta = \frac{d\Delta}{x_D - x}$$

$$d\Delta = (x_D - x)d\theta$$

$$\int_{DC} d\Delta = \int_{x_C}^{x_D} (x_D - x) \left[ -\frac{M}{EI} \right] dx$$

$$\Delta_{DC} = \overline{x_{DG}} \times \text{aire} \left[ -\frac{M}{EI} \right]_{x_C}^{x_D}$$



# Méthodes moments des aires:

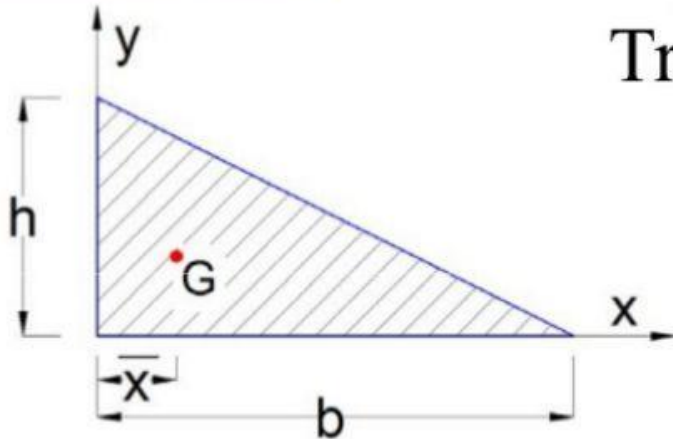
## Remarques

- ✓  $\overline{x_{DG}}$  : distance entre point D et G tel que G est le centre de gravité de la section sous  $\left[ -\frac{M}{EI} \right]_{x_D}^{x_C}$
- ✓  $\Delta_{DC} \neq \Delta_{CD}$
- ✓ . Cette méthode ne peuvent être utilisées pour déterminer la pente ou la déformation en un point précis au le long du membre.



# Méthodes moments des aires:

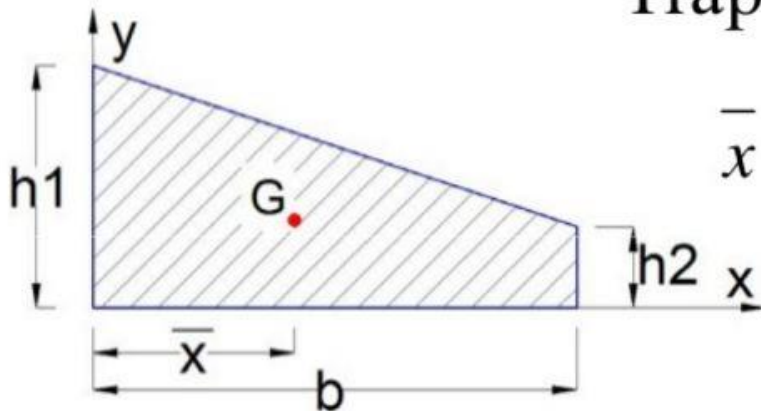
## Remarques: Centroïde



Triangle

$$\bar{x} = \frac{1}{3}b$$

$$A = \frac{bh}{2}$$



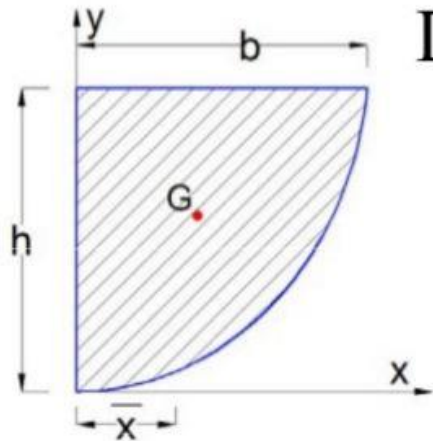
Trapèze

$$\bar{x} = \frac{b(2h_2 + h_1)}{3(h_1 + h_2)}$$

$$A = \frac{b(h_1 + h_2)}{2}$$

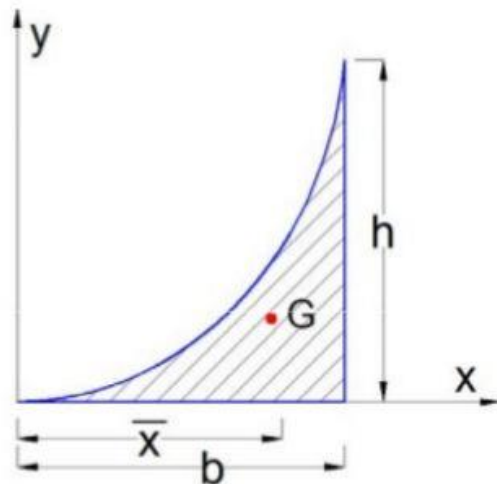
# Méthodes moments des aires:

## Remarques: Centroïde



Demi-segment d'une courbe de  $n^e$  degré

$$\bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)} \quad A = \frac{bhn}{(n+1)}$$



Surface sous un arc de parabole

$$\bar{x} = \frac{3}{4}b \quad A = \frac{bh}{3}$$



# Méthodes moments des aires:

## Exemple 1: d'application de la méthode

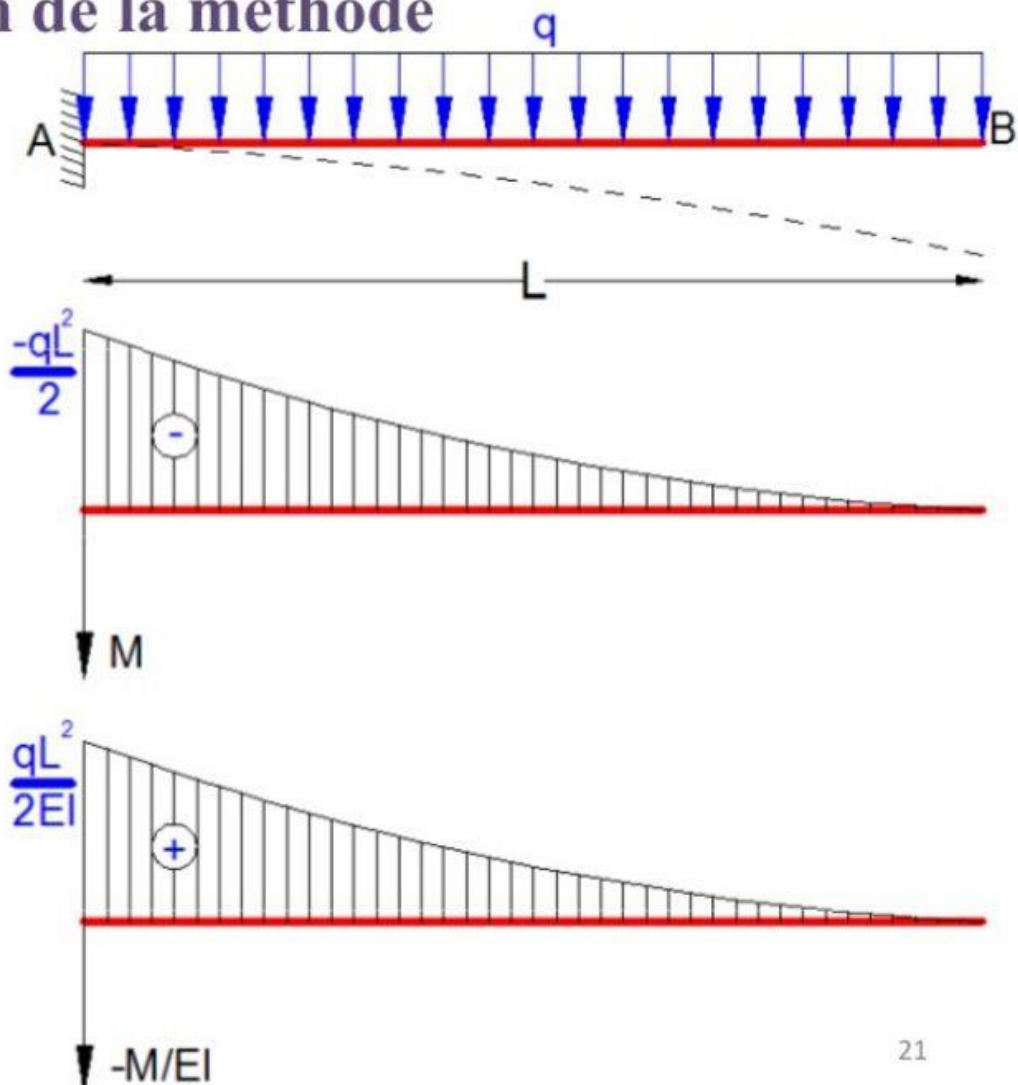
$$\theta_B - \theta_A = \text{aire} \left[ -\frac{M}{EI} \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$\theta_A = 0$$

$$\theta_B = \frac{1}{3} \left( \frac{qL^2}{2EI} \right) L = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$\Delta_{BA} = \overline{x_{BG}} \times \text{aire} \left[ -\frac{M}{EI} \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$\Delta_{BA} = \frac{3}{4} L \left( \frac{qL^3}{6EI} \right) = \frac{qL^4}{8EI}$$

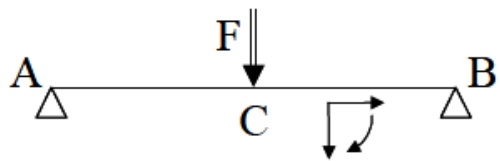
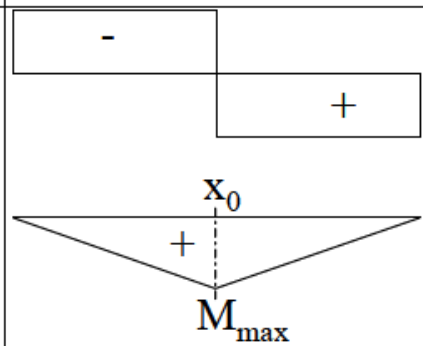
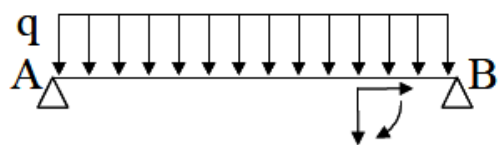
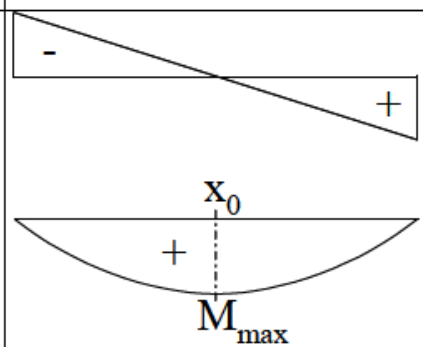


## 2.5. SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

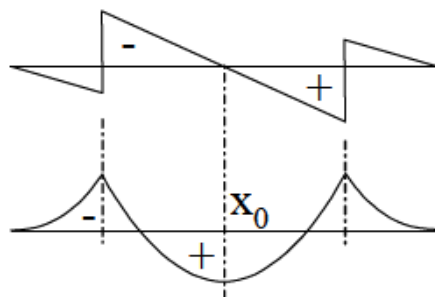
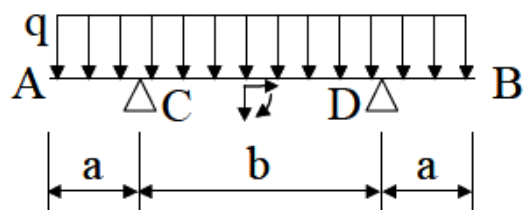
Les équations différentielles de la déformée sont des équations linéaires c'est à- dire tous les termes de  $v$ ,  $v'$  et  $v''$  sont du premier ordre. Les déformations dues à plusieurs cas de charges peuvent être donc superposées ou cumulées. Cette méthode est surtout utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charge élémentaire ou les déformations sont données dans les aides mémoires de la RDM.



## Quelque exemple pour déterminer efforts et flèches maximales

Configuration	Diagramme	Point	Effort	Flèche $Y_{max}$
		A	$Q = \frac{-F}{2}$	En $x = \frac{L}{2}$ $\frac{FL^3}{48EI}$
		$L/2$	$M = \frac{FL}{4}$	
		B	$Q = \frac{F}{2}$	
		A	$Q = \frac{-qL}{2}$	En $x = \frac{L}{2}$ $\frac{5qL^4}{384EI}$
		$L/2$	$M = \frac{qL^2}{8}$	
		B	$Q = \frac{qL}{2}$	

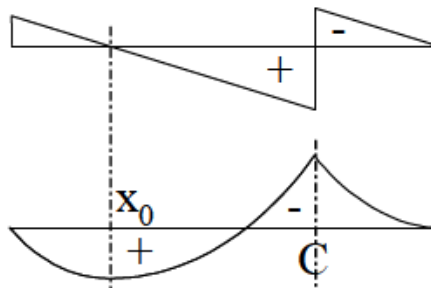
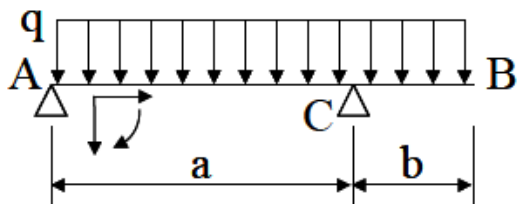
		<p>A</p> $Q = -F$		<p>En <math>x = \frac{L}{2}</math></p> $\frac{Fa(4a^2 - 3L^2)}{24EI}$	
		<p>A</p> $Q = -\frac{qL}{4}$			<p>En <math>x = \frac{L}{2}</math></p> $\frac{qL^4}{120EI}$
		<p>A</p> $Q = \frac{C}{L}$	$M = C$		



$Cg$	$Q = qa$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	En $x = \frac{L}{2}$ $\frac{qb^2(5b^2 - 24a^2)}{384EI}$
$Cd$	$Q = q(a - 0,5L)$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	En A, B : $\frac{qa(3a^3 + 6a^2b - b^3)}{24EI}$
$L/2$	$M = \frac{q(b^2 - 4a^2)}{8}$	
$Dg$	$Q = q(0,5L - a)$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	
$Dd$	$Q = -qa$ $M = \frac{-qa^2}{2}$	

		A	$Q = F$	En $x = \frac{L}{2}$
		C	$M = -Fa$	$\frac{-Fab^2}{8EI}$
		D	$Q = -F$	En A et B $\frac{Fa^2(3b+2a)}{6EI}$
		A	$Q = -F$	En B
			$M = -Fa$	$\frac{Fa^2(3L-a)}{6EI}$
		A	$T = -q \cdot L$	En B
			$M = \frac{-qL^2}{2}$	$\frac{qL^4}{8EI}$

		<p>A</p>	$Q = -\frac{qL}{2}$ $M = \frac{-qL^2}{6}$	<p>En B</p> $\frac{qL^4}{30EI}$
		<p>A</p> <p>C</p> <p>B</p>	$Q = \frac{Fb}{a}$ $M = -Fb$ $Q = -F$	<p>En B</p> $\frac{FLb^2}{3EI}$
		<p>A</p> <p>C</p> <p>Cd</p>	$Q = \frac{qb^2}{2a}$ $M = \frac{-qb^2}{2}$ $Q = -qb$	<p>En B</p> $\frac{qb^3(4a+3b)}{24EI}$



$A$	$Q = \frac{q(b^2 - a^2)}{2a}$	En B
$En$	$M = \frac{q(a^2 - b^2)^2}{8a^2}$	
$Cg$	$M = -\frac{qb^2}{2}$	
$Cd$	$Q = -qb$ $M = \frac{qb^2}{2}$	$\frac{qbL(3b^2 + ab - a^2)}{24EI}$



### Exemple :

Déterminer la flèche maximale de la poutre ci-dessous.

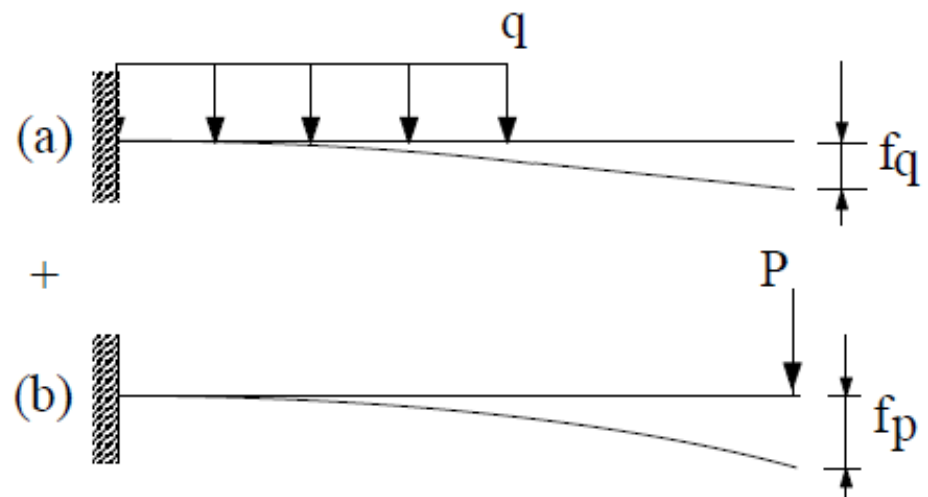
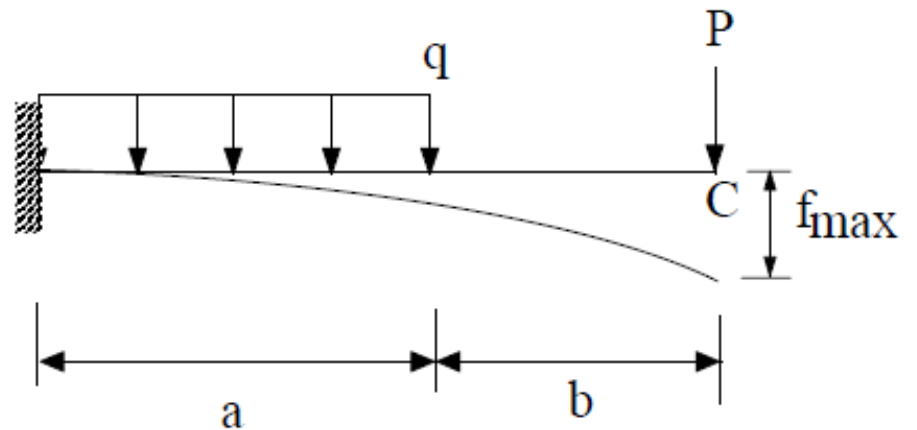
### Solution

$$f_{\max} = f_q + f_p$$

$$f_q = \frac{qa^3(4L - a)}{24EI}$$

$$f_p = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$f_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{qa^3(4L - a)}{24EI}$$



**MERCI**

