Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf –Mila

Résistance des Matériaux 2

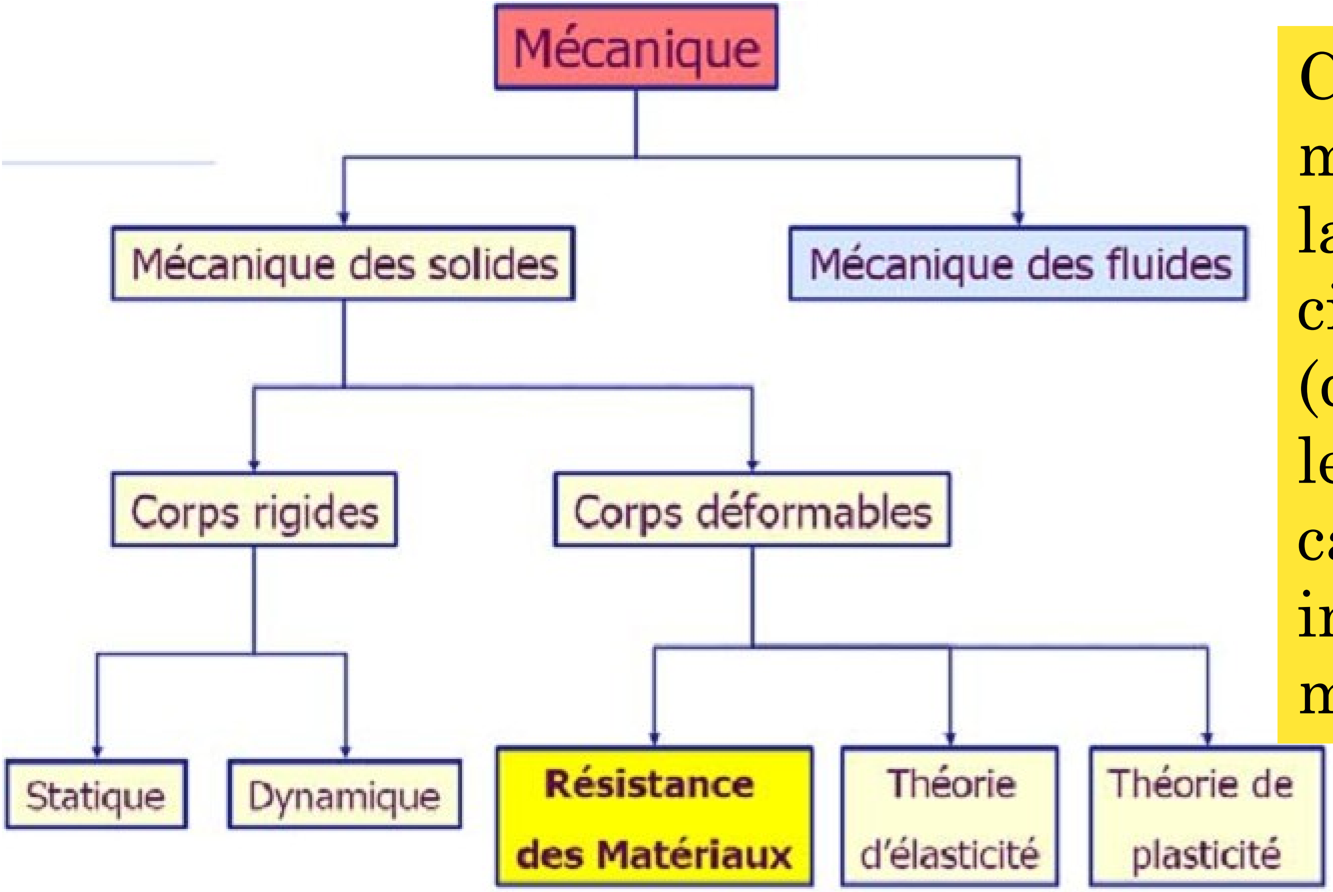
Chapitre 1 :

Flexion plane des poutres symétriques– rappel

LECHEHEB. M

A quoi ça sert ?

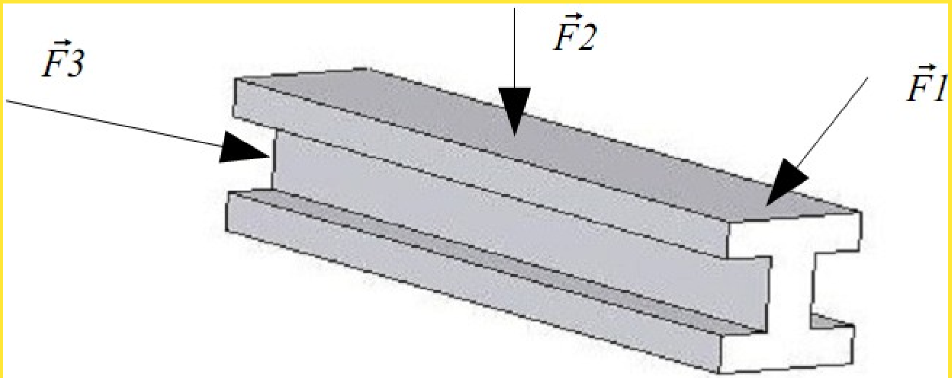
La Résistance Des Matériaux (RDM) permet de déterminer les formes, les dimensions et les matériaux de pièces mécaniques de façon à maîtriser leur résistance et leur déformation afin de répondre aux exigences du cahier des charges.



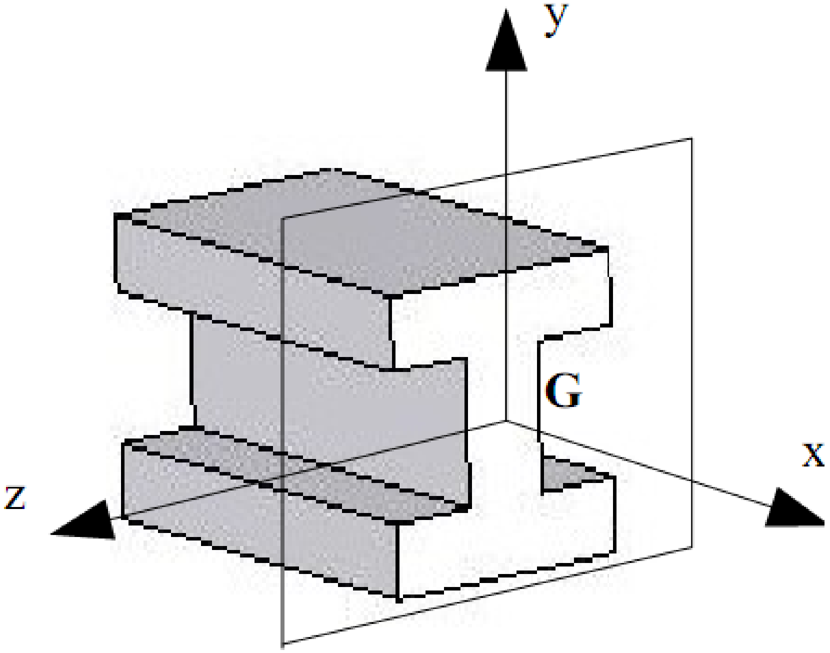
Cette science met en relation la statique, la cinématique (déformation) et les caractéristiques intrinsèques du matériau.

Notion de sollicitations :

La poutre ci-dessous est soumise à des efforts extérieurs. La direction et le sens de ces efforts par rapport à la ligne moyenne définissent le type de sollicitation que subit la poutre.



Torseur de cohésion :



NOTATION :

$$\left\{ T_{gcoh} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} N & Mt \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix} \right\}_G$$

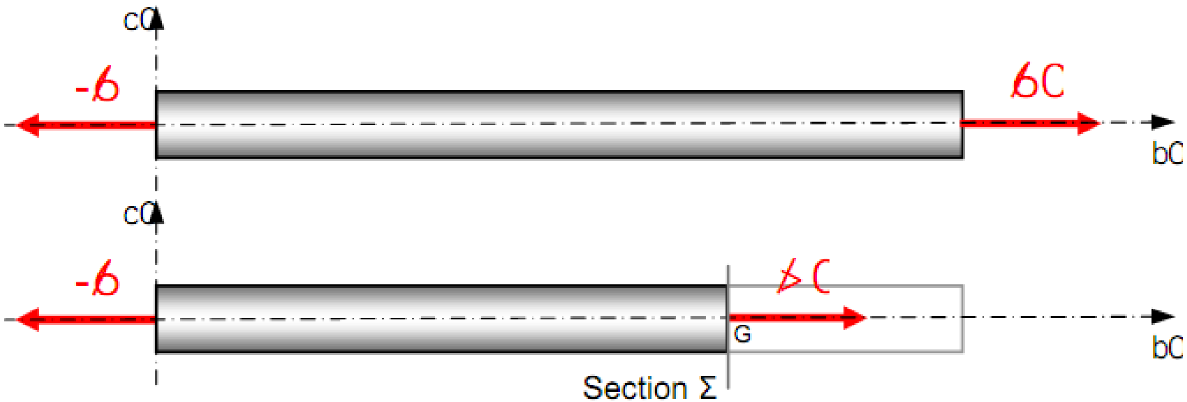
N : effort normal — Mt : moment de torsion.

Ty : effort tranchant — Mfy : moment fléchissant

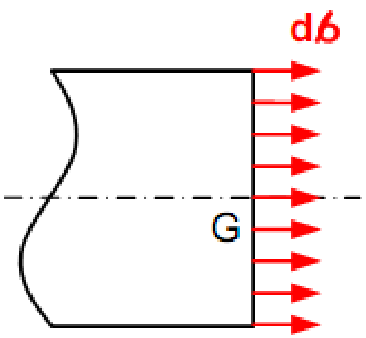
Tz : effort tranchant — Mfz: moment fléchissant

1. Les Sollicitations simples

1.1. Traction



$$ {}_G\{T_{coh}\}_R = {}_G\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R $$



Contrainte normale :

$$ \boxed{\sigma = \frac{N}{S}} $$

σ : contrainte normale en Mpa ou en N/mm^2
N : effort normal en N
S : aire de la section droite en mm^2

Condition de résistance :

$$ \boxed{\sigma \leq R_{pe}} $$

R_{pe} la résistance pratique à l'extension $R_{pe} = \frac{R_e}{s}$

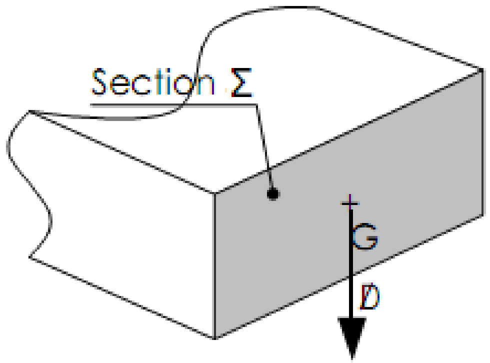
R_e la résistance élastique du matériau (en Mpa)

s un coefficient de sécurité (s>1)

1. Les Sollicitations simples

1.2. CISAILLEMENT

Définition :

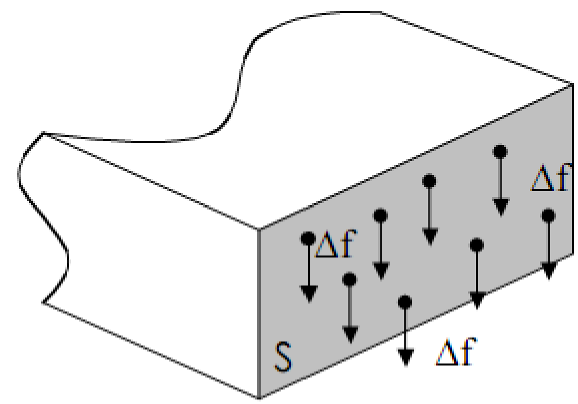


$$_G\{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ Tz & 0 \end{Bmatrix}_{G\ R}$$

Dans nos problèmes, nous aurons souvent soit $T_y=0$ ou soit $T_z=0$.

Contrainte de cisaillement :

$$\boxed{\tau = \frac{\|\vec{T}\|}{S}}$$



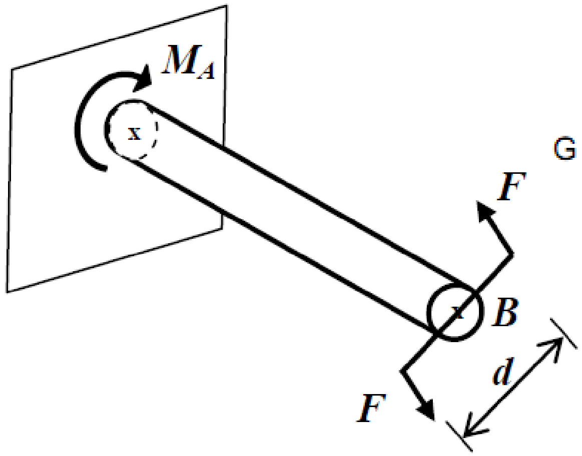
Condition de résistance :

$$\boxed{\tau \leq \tau_{adm} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}}$$

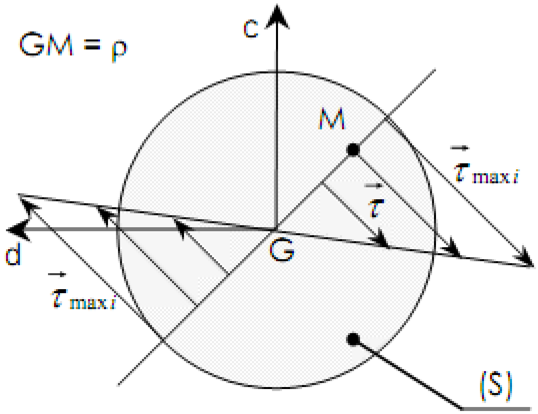
- ☞ R_{pg} la résistance pratique au cisaillement
- ☞ R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- ☞ s un coefficient de sécurité ;

1. Les Sollicitations simples

1.3. Torsion



$$_G\{T_{coh}\}_R = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$



Contrainte tangentielle :

$$\boxed{\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_G}}$$

M_t : Moment de torsion en N.mm
ρ : rayon GM en mm
I_G : moment quadratique de la section Σ par rapport au point G en mm^4

Condition de résistance :

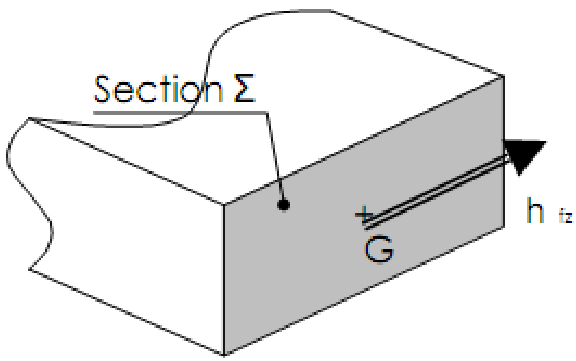
$$\boxed{©_{max} \leq R_{pg}}$$

- R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- s un coefficient de sécurité ;
- R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = \dfrac{R_{eg}}{s}$;

1. Les Sollicitations simples

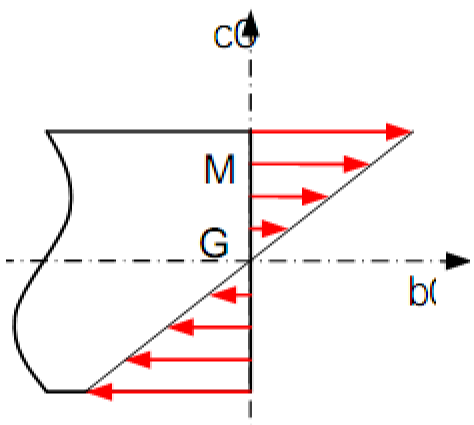
1.4. Flexion pure

Définition :



$$_{G}\{T_{coh}\}_{R} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & Mfy \\ 0 & Mfz \end{matrix}\right\}_{G,R}$$

Dans nos problèmes nous aurons souvent M_{fy} ou M_{fz} nul



Contrainte normale :

$$\boxed{\sigma = \frac{M_{fz}}{\dfrac{I_{Gz}}{y}}}$$

σ : contrainte normale en Mpa
M_{fz} : Moment fléchissant en N.mm
y : ordonnée du point M en mm
I_{Gz} : moment quadratique de la section par rapport à l'axe (G, d) en mm^4

Condition de résistance :

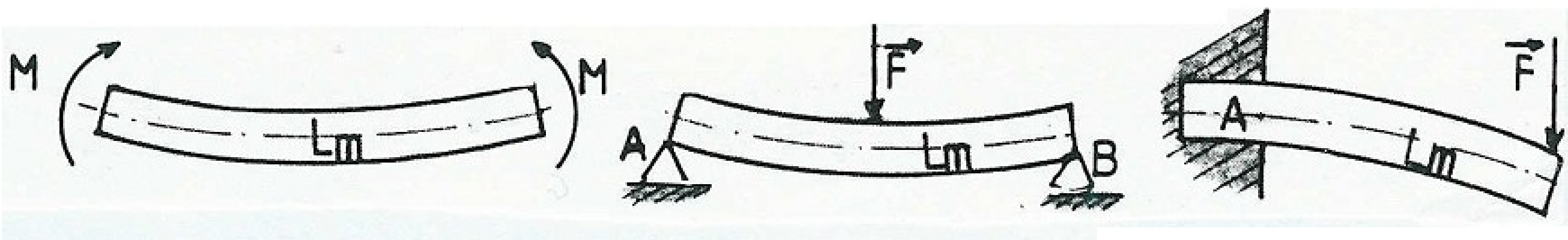
$$\boxed{\sigma_{max} \leq R_{pe}}$$

- R_e la résistance élastique du matériau (en Mpa) ;
- s un coefficient de sécurité (s>1);
- R_{pe} la résistance pratique à l'extension, avec $R_{pe} = \dfrac{R_e}{s}$

2. EFFORTS TRANCHANTS ET MOMENTS FLECHISSANT

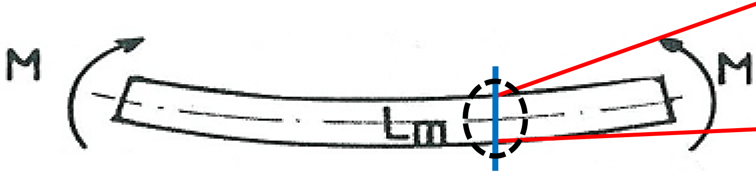
Différents types de flexion :

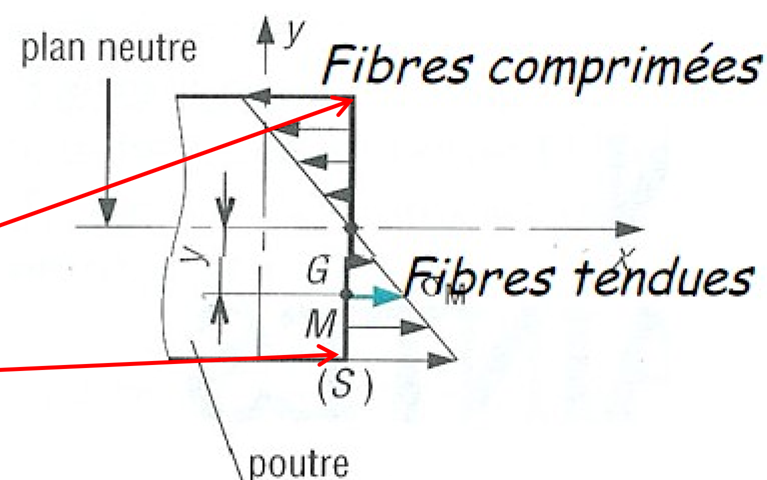
Flexion pure — Flexion simple — Flexion plane



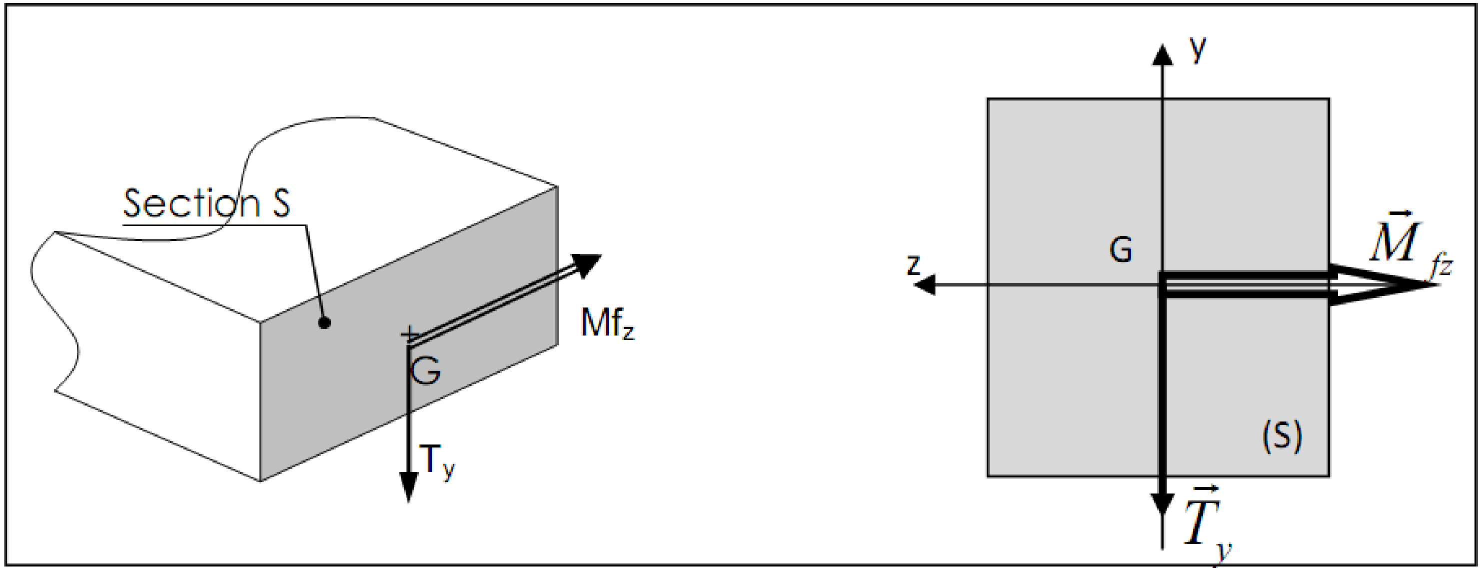
$$\{T_{gcoh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G \qquad \{T_{gcoh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G \qquad \{T_{gcoh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$$

Contraintes :





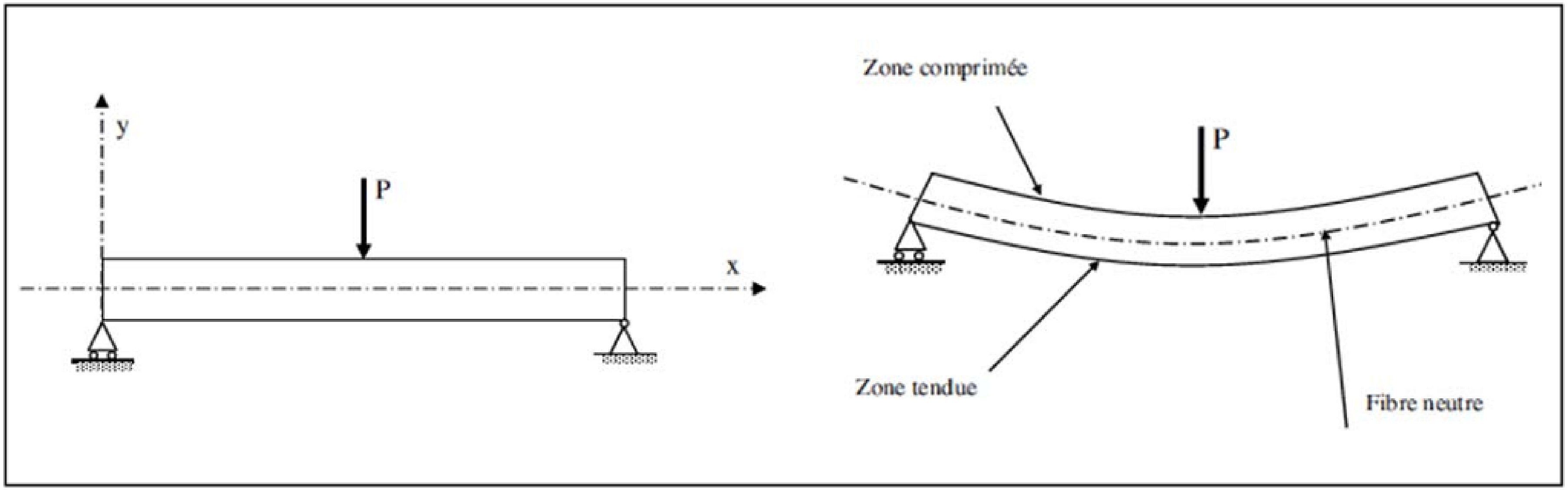
2.1.Flexion simple



Le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à une résultante contenue dans le plan de la section et à un moment perpendiculaire à cette dernière

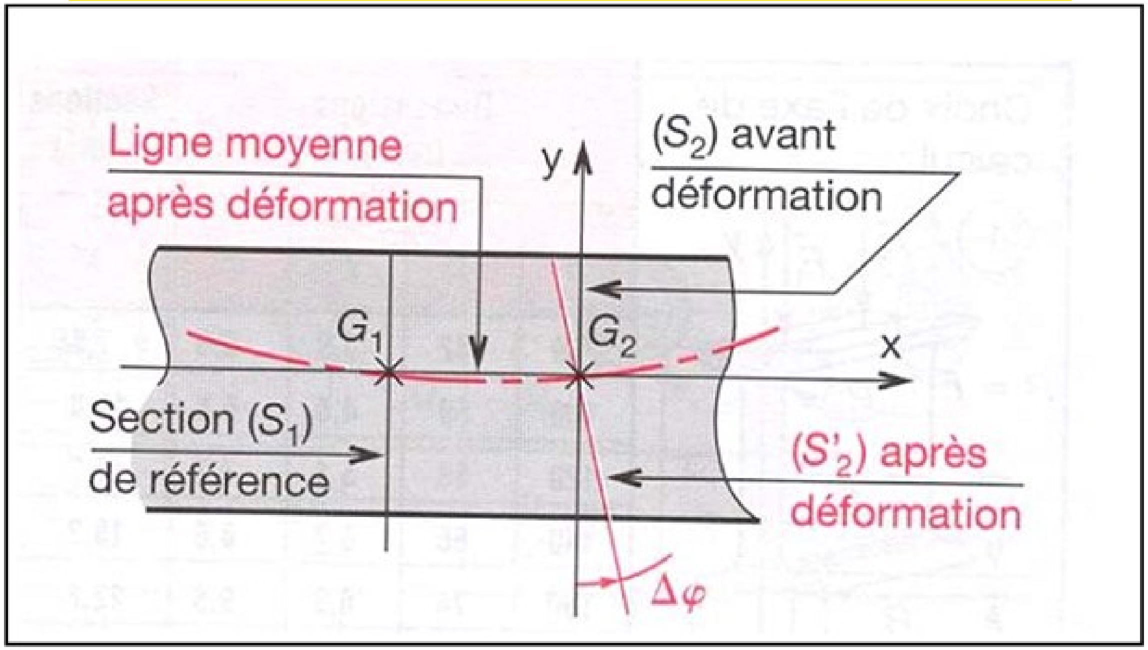
$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale. Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction



Entre ces deux régions il existe une fibre qui reste ni tendue ni comprimée : la fibre neutre. Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée.

Répartition des contraintes :



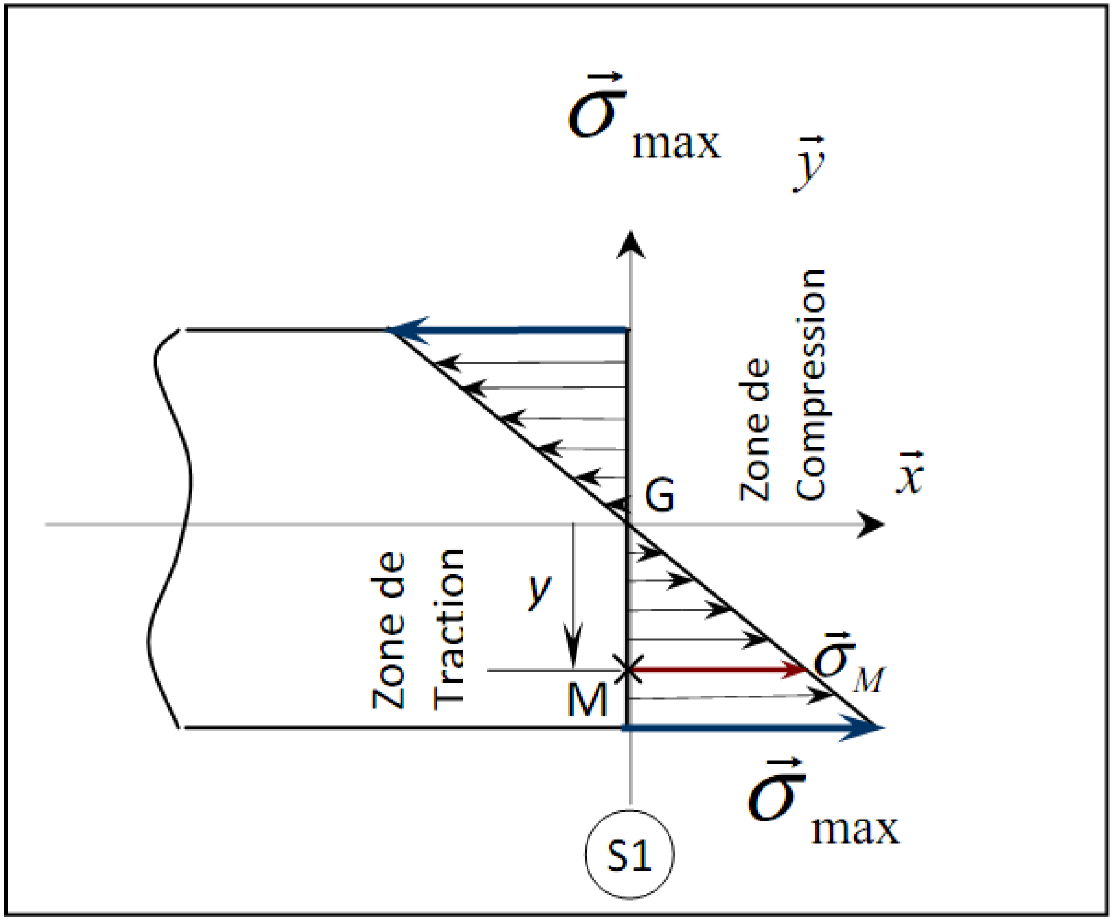
Lorsque la poutre fléchit, la section droite pivote d'un angle $\Delta\varphi$. Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à la distance qui les sépare du plan des fibres moyennes, d'où : $\sigma_M = -E\theta y$

E : Module, d'Young [MPa]

Y : distance de M par raport à la fibre neutre [mm].

Θ : Angle unitaire de flexion [rad/mm]

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$



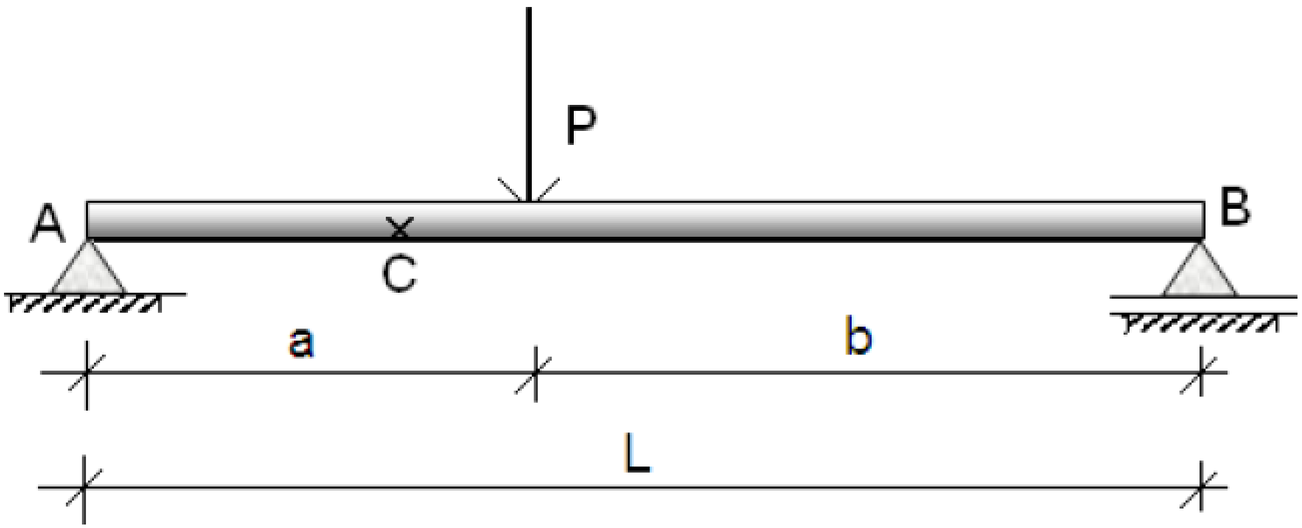
$$\sigma_x = -\frac{M_{fz}}{I_{GZ}}\, y$$

$$\left|\sigma_x\right|_{max} = \frac{M_{fz}}{I_{GZ}}\left|y\right|_{max}$$

Répartition des contraintes dans une section droite

Exemple:

Exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre schématisée par la figure ci-dessous



<u>*1ère partie : $0 \leq x \leq a$*</u>

<u>*2ème partie : $a \leq x \leq L$*</u>

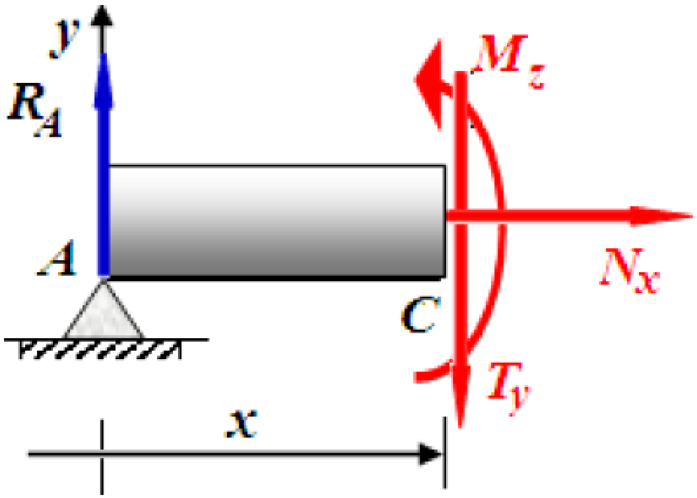


Fig. E6.1-b

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = Pb/L$
- $\sum M/_C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pb/L).x$

$M_Z(x=0) = 0$

$M_Z(x=a) = Pab/L$

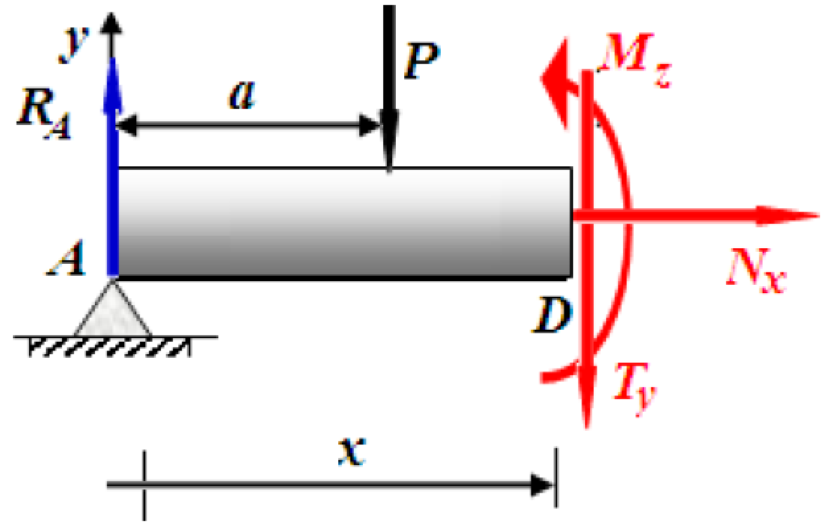
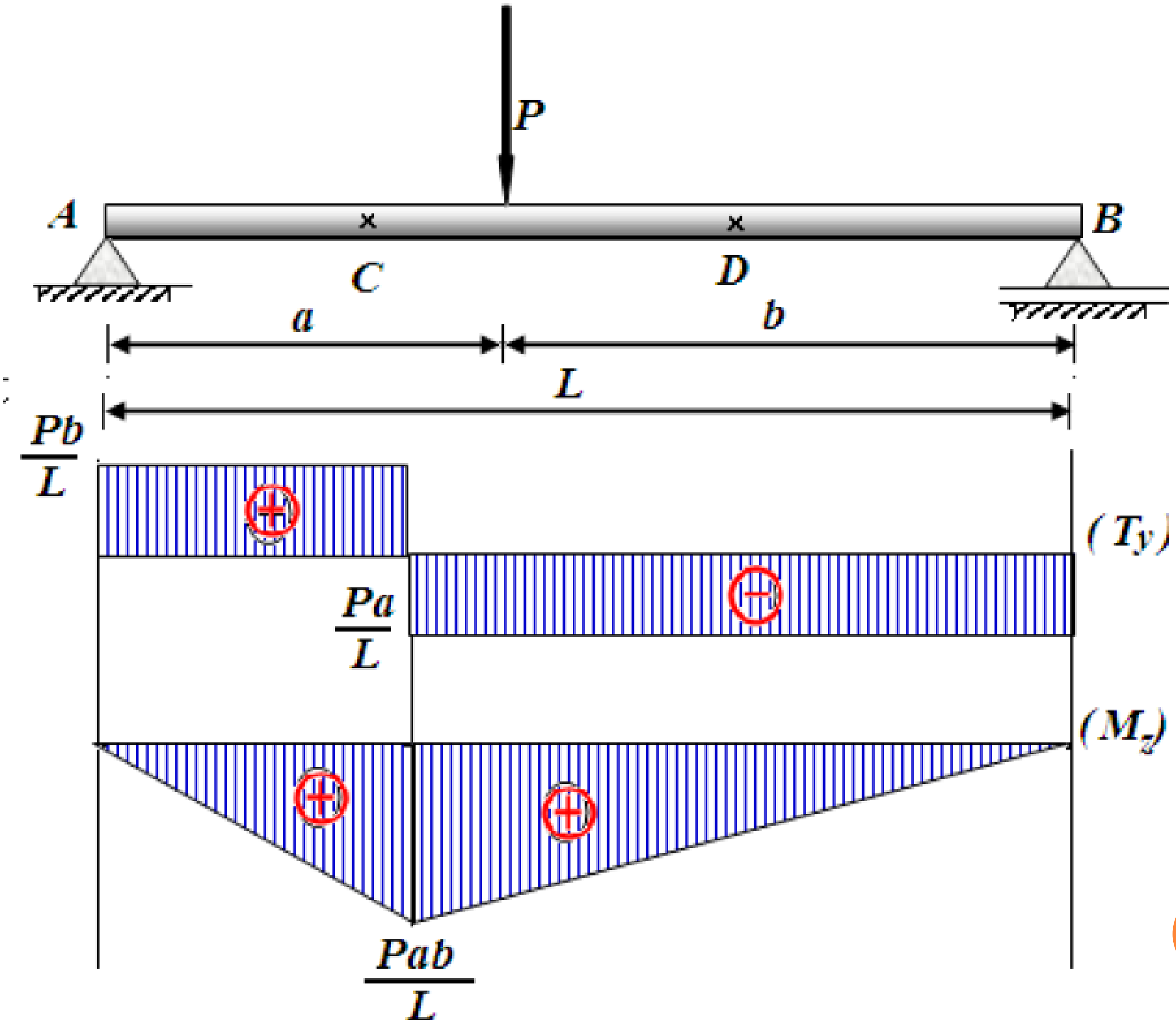


Fig. E6.1-c

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = - Pa/L$
- $\sum M/_C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pa/L).(L-x)$

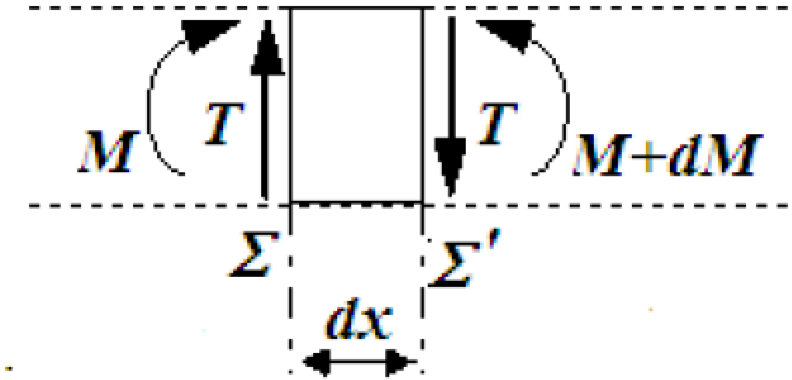
$M_Z(x=a) = Pab/L$

$M_Z(x=L) = 0$



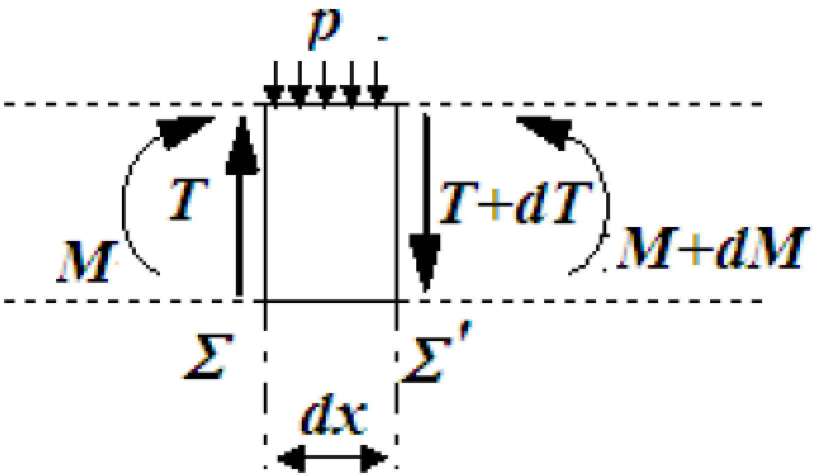
P
A
B
C
D
a
b
L
Pb/L
(Ty)
Pa/L
(Mz)
Pab/L

Relation entre moment fléchissant et effort tranchant



$$\boxed{\frac{dM}{dx} = T}$$

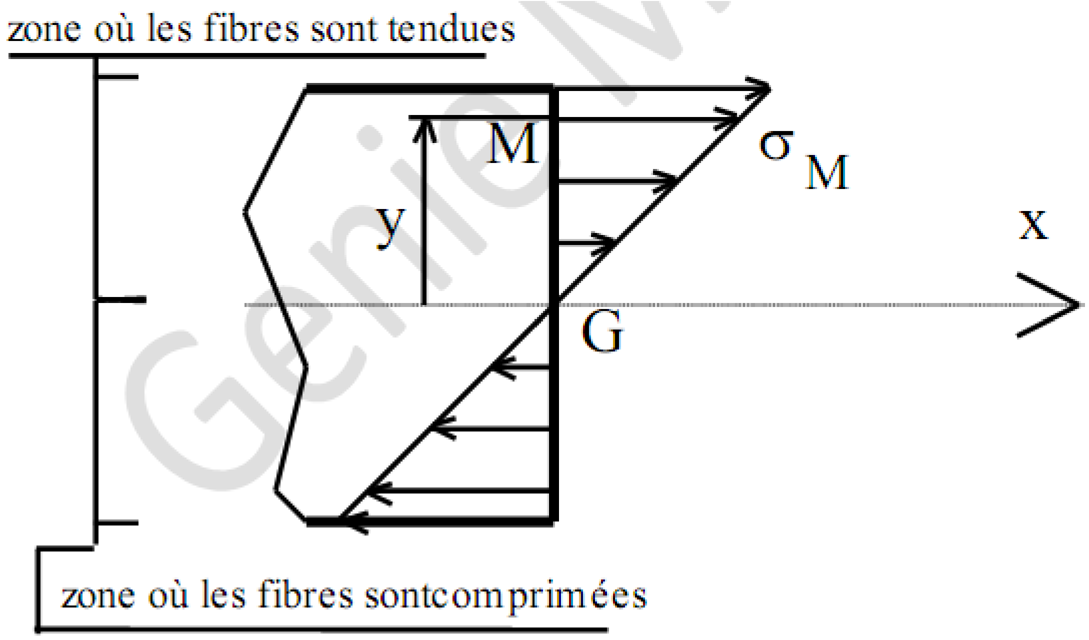
Relation entre effort tranchant et chargement réparti



$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -p}$$

3. La contrainte normale en flexion simple

La contrainte normale s en un point M d'une section droite (s) est proportionnelle à la distance y entre ce point et le plan moyen passant par G.



$$\boxed{\sigma = \frac{Mf}{Iz} \cdot y}$$

Conditions de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension σ_{pe}

$$\sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

s est un coefficient de sécurité

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\sigma_{réelle} = \frac{Mf_{\max i}}{\left(\dfrac{I_{Gz}}{y_{\max i}}\right)} < \sigma_{pe}$$

Contrainte tangentielle en flexion simple

Dans une poutre sollicitée en flexion plane simple les contraintes tangentielles s'expriment de la façon suivante:

$$\tau = \frac{T_y W_{Gz}}{z I_{Gz}}$$

où W(G, z) est le moment statique de la poutre par rapport à l'axe (G, z)

$$\tau_{max} = \frac{T_y W_{Gz}}{z_{max} I_{Gz}}$$

Conditions de résistance

$$\tau_{max} \leq R_{pg} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_y W_{Gz}}{z_{max} I_{Gz}} \leq \frac{R_{eg}}{s}$$