

## Chapitre 03 : Extension de la transformation de Park aux moteurs synchrones à distribution de champs non sinusoïdaux

### 1. Introduction

Les entraînements électriques utilisant des moteurs synchrones à aimants permanents sont de plus en plus utilisés dans des applications hautes performances nécessitant une très bonne maîtrise du couple délivré par le moteur.

Ce type de moteur présente des avantages tel que : l'absence des courants dans les phases du rotor et les courants magnétisants dans les phases du stator. De ce fait, ces moteur ont des pertes réduites et permettent d'avoir un couple élevé.

On distingue deux catégories de moteurs synchrones à aimants permanents :

- les moteurs à forces contre-électromotrices sinusoïdales.
- les moteurs à forces contre-électromotrices trapézoïdales (non sinusoïdale).

### 2. Modèle analytique du moteur synchrone à aimants permanents montés en surface

#### 2.1 Cas des machines à distribution de flux sinusoïdale

Les tensions  $V_a$ ,  $V_b$  et  $V_c$  aux bornes des trois phases du stator s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi_{ta} \\ \Phi_{tb} \\ \Phi_{tc} \end{pmatrix} \quad (1)$$

où :

$R_s$  est la résistance des bobinages du stator ;

$i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$  courants statoriques.

$\Phi_{ta}$ ,  $\Phi_{tb}$  et  $\Phi_{tc}$  représentent les flux totaux induits à travers chacun des bobinages du stator.

$$\begin{pmatrix} \Phi_{ta} \\ \Phi_{tb} \\ \Phi_{tc} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{pmatrix} \quad (2)$$

$\Phi_{ra}$ ,  $\Phi_{rb}$  et  $\Phi_{rc}$  flux induits par les aimants, leurs expressions sont (géométrie de leurs dispositions) :

$$\begin{pmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{pmatrix} = \Phi_m \begin{pmatrix} \cos(p\theta) \\ \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad \text{leurs dérivées } \begin{pmatrix} \Phi'_{ra} \\ \Phi'_{rb} \\ \Phi'_{rc} \end{pmatrix} = -p\Phi_m \begin{pmatrix} \sin(p\theta) \\ \sin\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad (3)$$

La symétrie de  $\mathbf{L}$  provient directement de la symétrie triphasée de la machine.

Comme on a une machine à pôles lisses dans laquelle on a négligé les effets de la saturation, les paramètres  $L_s$  et  $M_s$  sont constants et on peut donc écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + p\Omega \begin{pmatrix} \Phi'_{ra} \\ \Phi'_{rb} \\ \Phi'_{rc} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Où :

$$\begin{pmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{pmatrix} = p\Omega \begin{pmatrix} \Phi'_{ra} \\ \Phi'_{rb} \\ \Phi'_{rc} \end{pmatrix} = p\Omega \frac{d}{d(p\theta)} \begin{pmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{pmatrix} \quad , \text{ avec } \theta = \omega t \text{ et } \omega = \Omega/p \quad (5)$$

$p$  : est le nombre de paires de pôles.

$\theta$  : est la position instantanée du rotor (l'angle entre les deux axes, stator et rotor) et  $p\theta$  la position électrique du rotor,

$\Omega = d\theta/dt$  : vitesse mécanique du rotor.

Les variables  $\Phi'_{ra}$ ,  $\Phi'_{rb}$ ,  $\Phi'_{rc}$  sont en fonction de la position du rotor.

## 2.2 Cas des machines à distribution de flux non-sinusoïdale

La densité de flux radial supposée est donnée par la figure (1) :

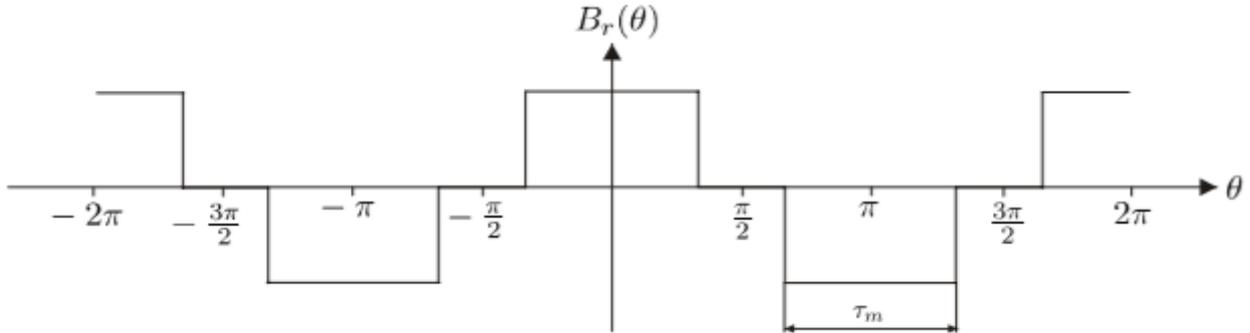


figure (1) : La densité de flux radial supposée dans l'entrefer

Le champ magnétique  $B_r(\theta)$  peut être exprimé par la série de Fourier, comme suit :

$$B_r(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{(2n-1)} \cos((2n-1)\theta) = B_1 \cos\theta + B_3 \cos(3\theta) + B_5 \cos(5\theta) + \dots \quad (6)$$

Le calcul analytique des coefficients de Fourier donne :

$$B_n = \frac{4B_m}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\tau_m}{2}\right); \text{ où } B = B_m(0) \text{ valeur maximale pour } \theta=0, \tau_m : \text{ pas polaire.}$$

On peut constater que l'amplitude des coefficients diminue rapidement avec l'augmentation de  $n$ .

Le flux induit par les aimants du rotor dans l'enroulement du stator peut également être exprimée comme une somme de cosinus impairs où les coefficients diminuent rapidement.

$$\Phi_r(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{(2n-1)} \cos((2n-1)\theta) = \Phi_1 \cos\theta + \Phi_3 \cos(3\theta) + \Phi_5 \cos(5\theta) + \dots \quad (7)$$

Dans le cas d'une machine à distribution de flux non sinusoïdale, les variables  $\Phi'_{ra}$ ,  $\Phi'_{rb}$  et  $\Phi'_{rc}$  peuvent être mesurées à partir d'un simple essai à vide de la machine (essai à courants de phase nuls). On remarque en effet que d'après l'équation (3), ces variables sont égales aux forces contre-électromotrices ( $f_{cem}$ ) mesurées à vide divisées par la vitesse à laquelle ce relevé de  $f_{cem}$  a été effectué.

La figure 2 représente la variation du paramètre  $\Phi'_{ra}$  en fonction de la position électrique du moteur.

Pour des raisons évidentes de symétrie des enroulements de la machine, on a :

$$\begin{pmatrix} \Phi'_{ra} \\ \Phi'_{rb} \\ \Phi'_{rc} \end{pmatrix} = -p\Phi_m \begin{pmatrix} \sin(p\theta) \\ \sin\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad (8)$$

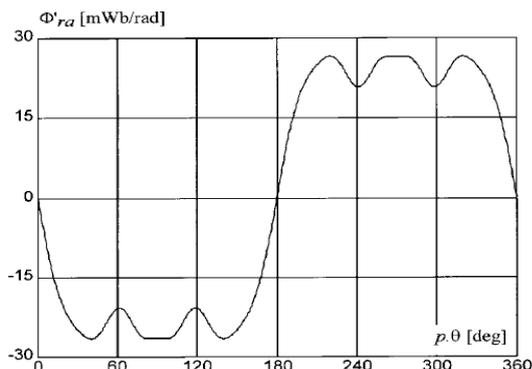


Figure 2. Allure de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor dans la phase (a) du stator en fonction de la position électrique.

La forme d'onde ci-dessus peut être décomposée en série de Fourier. A cause de sa symétrie, elle ne contient aucun harmonique de rang pair et on peut écrire :

$$\Phi_r(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{(2n-1)} \cos((2n-1)\theta) = \Phi_1 \cos\theta + \Phi_3 \cos(3\theta) + \Phi_5 \cos(5\theta) + \dots \quad (9)$$

et

$$\Phi_r'(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{(2n-1)} \sin((2n-1)\theta) = -\Phi_1 \sin\theta - 3\Phi_3 \sin(3\theta) - 5\Phi_5 \sin(5\theta) - \dots \quad (10)$$

ou  $\Phi_{(2n-1)}$  désigne l'amplitude de l'harmonique de rang  $(2n-1)$  de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor.

Les paramètres  $\Phi'_{ra}$ ,  $\Phi'_{rb}$  et  $\Phi'_{rc}$  interviennent dans l'expression du couple électromagnétique délivré par le moteur. Ce couple est en effet égal à la dérivée de la co-énergie induite par les aimants du rotor dans les phases du stator. On a :

$$C = \frac{(e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c)}{\Omega} = \frac{p\Omega(\Phi'_{ra} \cdot i_a + \Phi'_{rb} \cdot i_b + \Phi'_{rc} \cdot i_c)}{\Omega} \quad (11)$$

### 3. Application de la Transformation de Concordia

Cette transformation est donnée par :

$$x_{3\phi} = (x_{abc})^t = T_{31} x_o + T_{32} x_2 = T_{31} x_o + T_{32} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$T_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } T_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Une fois appliquée cette transformation aux vecteurs tensions, courants et flux triphasés, elle détermine les variables homopolaires  $V_o$ ,  $i_o$  et  $\Phi_o$  et les variables diphasés  $(V_\alpha, V_\beta)^t$  et  $(i_\alpha, i_\beta)^t$   $(\Phi'_{ra}, \Phi'_{r\beta})^t$ . Ces variables dépendent en régime permanent de la position électrique du moteur.

L'équation (3) se transforme en :

$$V_o = R_s i_o + (L_s + 2M_s) \frac{di_o}{dt} + p\Omega \Phi'_{ro} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + (L_s - M_s) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + p\Omega \begin{pmatrix} \Phi'_{ra} \\ \Phi'_{r\beta} \end{pmatrix} \quad (15)$$

L'équation (11) du couple devient :

$$C = p(\Phi'_{ro} \cdot i_o + \Phi'_{ra} \cdot i_\alpha + \Phi'_{r\beta} \cdot i_\beta) \quad (16)$$

Les équations (14 et 15) sont des équations totalement découplées mais restent non-linéaires (dépendance vis-à-vis de la position).

#### 3.1 Cas des machines à distribution de flux sinusoïdale

Dans le cas où la distribution du flux est sinusoïdale (système équilibré  $x_a + x_b + x_c = 0$ ), la composante homolaire est nulle.

Seules les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont prises en considération:

$$\Phi'_{ra} = -p \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \Phi_m \sin(p\theta) \quad , \quad \Phi'_{r\beta} = p \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \Phi_m \cos(p\theta) \quad \text{et } \Phi'_{ro} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \Phi'_{ra} \\ \Phi'_{r\beta} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} p \Phi_m \begin{pmatrix} -\sin(p\theta) \\ \cos(p\theta) \end{pmatrix} \quad (17)$$

Ces deux composantes sont en quadrature l'une par rapport à l'autre. Dans le repère de Concordia, la machine synchrone triphasée à distribution de flux sinusoïdale et connectée en étoile est donc équivalente à une machine diphasée sinusoïdale.

### 3.2 Cas des machines à distribution de flux non-sinusoïdale

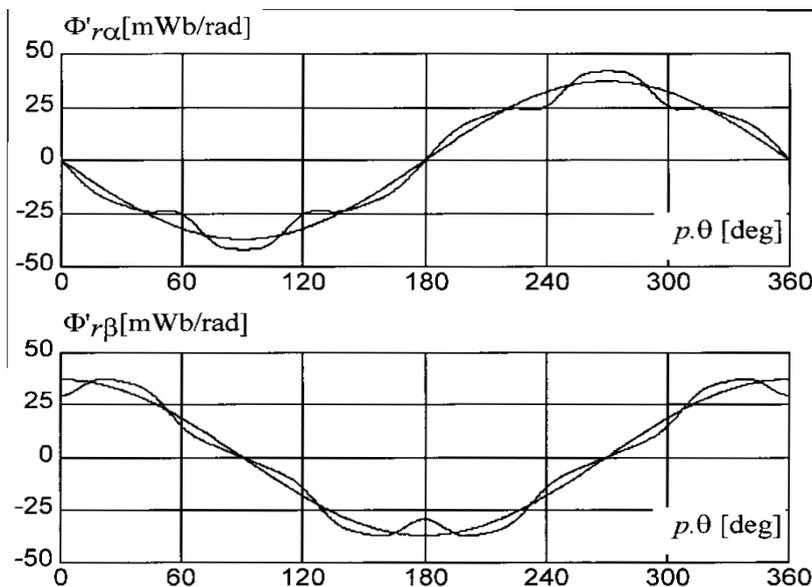
Les composantes homopolaires, des flux et leurs dérivées, ne sont pas nulles, elles sont déduites de (7) et (8).

$$\Phi'_{ro}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{(3(2n-1))} \sin(3(2n-1)\theta) \quad (18)$$

Ceci signifie, qu'en présence d'harmoniques de rangs multiples de trois, la composante homopolaire, du vecteur représentatif des dérivées du flux induit par les aimants du rotor dans les phases du stator, n'est pas nulle.

Il est donc possible d'obtenir un couple moteur à partir de la machine homopolaire équivalente. Cependant ce moteur homopolaire étant un moteur monophasé, il n'est pas capable de fournir un couple quelle que soit la position du moteur. Plus précisément, ce couple moteur homopolaire sera nul pour toute position où  $\Phi'_{ro}$  est nul. C'est pourquoi la plupart des constructeurs maintiennent, même pour les moteurs à distribution de flux non-sinusoïdale, une connexion des bobinages statoriques en étoile qui rend impossible la circulation d'un courant homopolaire.

En ce qui concerne les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  de ce même vecteur, elles ne sont plus diphasées de  $90^\circ$  l'une par rapport à l'autre (Fig. 3). Ce moteur  $\alpha\beta$  ne correspond donc pas à une machine diphasée équivalente physiquement réalisable.



**Figure 3.** Composantes  $\alpha$  et  $\beta$  du vecteur représentatif de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor dans les phases du stator en fonction de la position électrique et leur premier harmonique.

## 4. Application de la transformation de Park

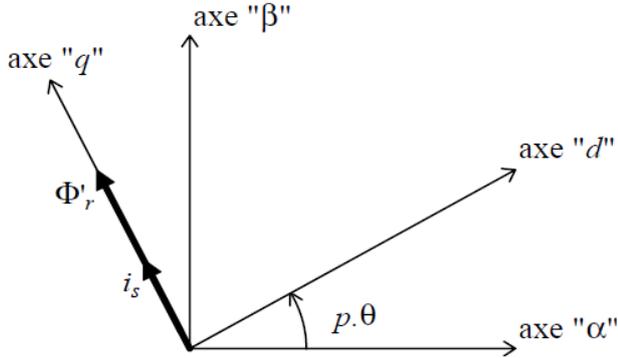
Elle permet de simplifier de plus en plus les équations de la machine.

### 4.1 Cas des machines à distribution de flux sinusoïdale

Dans le cas des machines à distribution de flux sinusoïdale, un choix de repère intéressant dans le plan  $\alpha\beta$  est celui proposé par Park.

L'axe « d » est défini comme étant à tout instant aligné avec le flux induit par les aimants du rotor dans les phases du stator. L'axe « q » est choisi de façon à être orthogonal à cet axe « d ».

La distribution de flux étant sinusoïdale, le vecteur représentatif des dérivées du flux induit par les aimants du rotor sera alors aligné sur cet axe « q », figure(4) .



**Figure 4.** Orientations des flux dans le repère de Park (cas de la machine synchrone à distribution de flux sinusoïdale).

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \mathbf{P}(p\theta) \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} \quad (19)$$

$\mathbf{P}(p\theta)$  désigne une rotation du repère d'un angle  $p\theta$ . Une telle transformation d'état présente un certain nombre des propriétés :

- **P1** : le repère défini par la transformation de Park est orthogonal,
- **P2** : le repère défini par la transformation de Park est normée.

De **P1** et **P2** on déduit que la transformée est ortho-normale son inverse est donc égale à sa transposée :

$$\mathbf{P}(p\theta)^{-1} = \mathbf{P}(p\theta)^t = \mathbf{P}(-p\theta). \quad (20)$$

Cette rotation définit  $(V_d V_q)^t$ ,  $(I_d I_q)^t$  et  $(\Phi'_{rd} \Phi'_{rq})^t$ . D'après les équations (17 et 19), la composante  $\Phi'_{rd}$  est identiquement nulle.

Donc, **P3** :  $\Phi'_{rd}(p\theta) = 0, \forall \theta$ .

L'équation électrique (15) de la machine synchrone devient alors :

$$\begin{pmatrix} V_d \\ V_q \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + (L_s - M_s) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + p\Omega(L_s - M_s) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + p\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi'_{rq} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Soit :

$$V_d = R_s i_d + (L_s - M_s) \frac{di_d}{dt} - p\Omega(L_s - M_s) i_q \quad (22)$$

$$V_q = R_s i_q + (L_s - M_s) \frac{di_q}{dt} + p\Omega(L_s - M_s) i_d + p\Omega \Phi'_{rq} \quad (23)$$

où  $\Phi'_{rq} = p\sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_m = \text{cte}$  et  $\Phi'_{rd} = 0$ , alors le couple ne dépend que du courant  $i_q$ ,

$$C = p\Phi'_{rq} i_q \quad (24)$$

**P4** : le facteur de proportionnalité entre le courant  $i_q$  et le couple est constant.

Les propriétés **P1** à **P4** permettent de définir des commandes à flux orienté de la machine synchrone, qui optimisent la conversion électromécanique d'énergie. En effet, les pertes  $P_j$  dans la machine (le modèle analytique considéré ici ne prend en compte que les pertes Joule) dépendent elles, de la composante « d » du courant :

$$P_j = R_s (i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) = R_s (i_a^2 + i_b^2) = R_s (i_d^2 + i_q^2) \quad (25)$$

Il est donc possible de minimiser les pertes par effet Joule et donc d'optimiser la conversion d'énergie dans le moteur, en imposant simplement une composante 'd' du courant nulle. Cela revient à orienter le champ magnétique tournant créé par les courants statoriques en quadrature avec le champ créé par les aimants du rotor. Ce sont donc ces propriétés P1 à P4 que nous chercherons à retrouver dans ce qui suit, quand nous définirons des extensions de cette transformation de Park.

#### 4.2 Cas des machines à distribution de flux non-sinusoïdale

Certains auteurs [3,4], proposent d'appliquer cette même transformation de Park au cas des machines à distribution de flux non-sinusoïdale. Ceci leur permet d'utiliser pour ce type de machine, les mêmes techniques de commande que dans le cas des machines à distribution de flux sinusoïdale, à savoir, le maintien du courant  $i_d$  à une valeur nulle et régulation du couple par action sur le courant  $i_q$ .

Cependant, dans le cas d'une machine à distribution de flux non-sinusoïdale, il est possible que l'amplitude de  $\Phi'_{rq}$  dépende de la position électrique du moteur (Fig. 5).

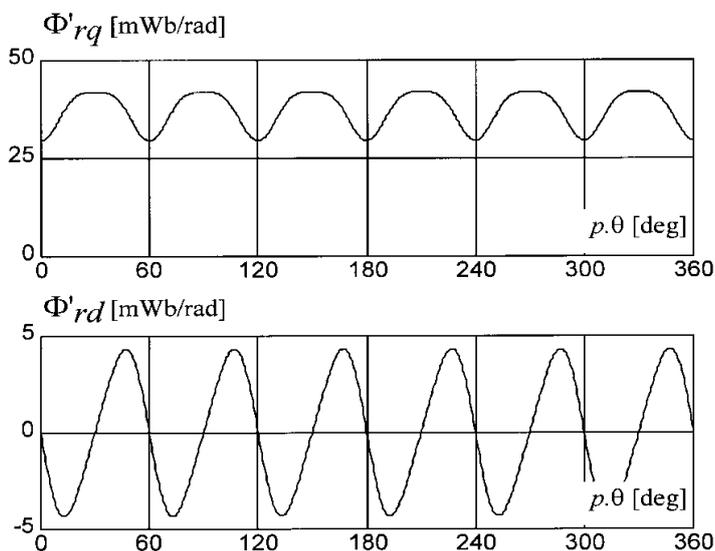


Figure 5. Composante 'd' (en bas) et 'q' (en haut) du vecteur représentatif de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor dans les phases du stator en fonction de la position électrique.

Cette dépendance  $\Phi'_{rq} = f(\theta)$  représente un problème dans la commande du moteur. Il est nécessaire d'imposer dans les phases du stator des courants dont la composante 'q' varie avec la position et donc avec le temps.

On peut ainsi prévoir que les performances en régime permanent (autrement dit à consigne de couple constante) de la commande dans le repère de Park d'un moteur à distribution de flux non-sinusoïdale dépendent étroitement des performances de cette commande en régime dynamique puisque celle-ci se résume à une simple poursuite d'une consigne de courant variable avec le temps. Les performances en régime permanent de cette commande ne seront donc guère différentes des performances que l'on peut obtenir avec une commande en courants effectuée directement dans le repère "abc".

Le seul avantage obtenu à ce stade par la transformation de Park est qu'il n'existe plus qu'une seule référence de courant variable avec le temps à poursuivre (le courant  $i_q$ ) au lieu de deux (les courants  $i_a$  et  $i_b$  par exemple). Il est donc plus aisé d'implanter des techniques de compensation des variations de l'amplitude de  $\Phi'_{rq}$  pour réduire les ondulations du couple moteur en régime permanent.

A côté de cet avantage il y a un effet nuisible c'est que  $i_d$  ne sera pas nul, dans les cas de distribution non-sinusoïdale.

L'expression du couple électromagnétique dépend alors des deux composantes "d" et "q" du vecteur des courants statoriques.

$$C = p(\Phi'_{rd} \cdot i_d + \Phi'_{rq} \cdot i_q) \quad (26)$$

Il n'est donc plus possible de minimiser les pertes Joule dans le moteur simplement en imposant une composante à  $i_d = 0$  puisqu'alors les vecteurs représentatifs des courants statoriques et des dérivées des flux induits par les aimants du rotor ne seraient plus alignés, figure(6).

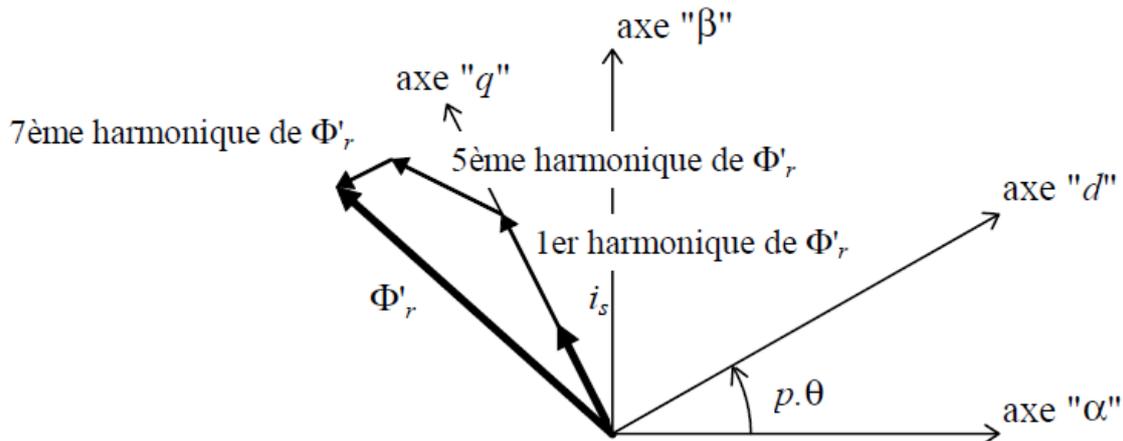


Figure 6 : Orientation des flux dans le repère de Park (cas de la machine synchrone à distribution de flux non-sinusoïdale).

Le problème de la commande dans le repère de Park d'une machine à distribution de flux non-sinusoïdale reste donc un problème de commande multi-variable qui nécessite la poursuite de deux courants de référence variables en fonction de la position électrique de la machine. Aucun progrès substantiel ne peut donc être observé par rapport à une commande directement dans le repère "αβ" ou le repère "abc".

Les équations électriques de la machine dans ce nouveau repère s'écrivent :

$$V_d = R_s i_d + (L_s - M_s) \frac{di_d}{dt} - p\Omega(L_s - M_s) i_q + p\Omega \Phi'_{rd}(p\theta) \quad (27)$$

$$V_q = R_s i_q + (L_s - M_s) \frac{di_q}{dt} + p\Omega(L_s - M_s) i_d + p\Omega \Phi'_{rq}(p\theta) \quad (28)$$

On peut même considérer que le problème de la commande s'est en partie aggravé du fait des couplages existant entre les phases "d" et "q" de la machine.

## 5 Extension de la transformation de Park : Définition d'une nouvelle orientation des axes

### 5.1 Définition d'une nouvelle orientation des axes

Le couple électromagnétique s'exprime d'une façon générale comme étant le produit scalaire du vecteur des courants statoriques et du vecteur représentatif de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor. Pour les machines à distribution des flux sinusoïdales, la simplification obtenue par la transformation de Park ne résulte donc pas tant de l'alignement de l'axe "d" avec la direction de vecteur représentatif du flux induit par les aimants mais bien davantage de l'alignement de l'axe "q" avec le vecteur représentatif de la dérivée de ces flux.

Ces deux propriétés sont certes équivalentes dans le cas d'une machine à distribution de flux sinusoïdale. Elles ne le sont cependant pas nécessairement dans le cas d'une machine à distribution de flux non-sinusoïdale.

Dans ce dernier cas, il convient donc de rechercher un nouveau repère orthonormé dans le plan "αβ" (que nous appellerons repère de Park étendu) dont un des deux axes soit alignés avec le vecteur représentatif de la dérivée des flux induits par les aimants du rotor. Ce repère doit être tel que l'une des deux composantes  $\Phi'_{rde}$  et  $\Phi'_{rqe}$  du vecteur représentatif de la dérivée du flux induit par les aimants soit nulle. Par analogie avec le cas sinusoïdal, nous chercherons à retrouver la propriété P3, à savoir  $\Phi'_{rde} = 0$ .

On conserve P1 et P2, repère orthonormé, (conservation de la puissance).

Compte tenu de ceci le couple électromagnétique sera de même que celui du flux à distribution sinusoïdale :

$$C = p\Phi'_{rqe}(p\theta)i_{qe} \quad (29)$$

Excepté que l'on ne peut toujours pas garantir, à ce stade, que l'amplitude de  $\Phi'_{rde} = 0$ , constante (indépendante de la position).

Une transformation orthonormée dans un plan est une rotation. On note  $p\theta + \mu(\theta)$  l'angle de passage du repère "αβ" au nouveau repère "dq-étendu". La matrice de passage du repère "αβ" au repère de Park est donc la matrice  $Pe(p\theta) = P(p\theta + \mu)$ .

Pour obtenir  $\Phi'_{rde} = 0$  (propriété P3) l'angle  $\mu$  doit vérifier :

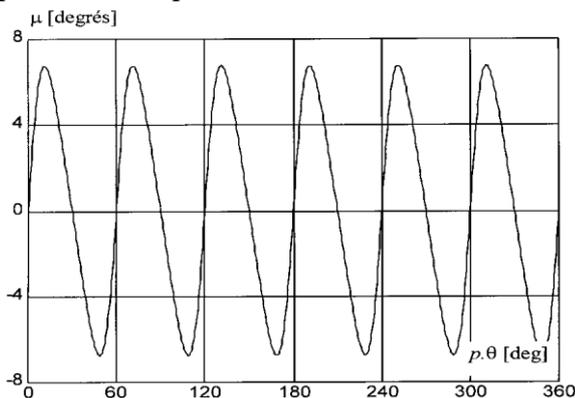
$$\begin{pmatrix} \Phi'_{rde} \\ \Phi'_{rqe} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi'_{rqe} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p\theta + \mu) & \sin(p\theta + \mu) \\ -\sin(p\theta + \mu) & \cos(p\theta + \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi'_{r\alpha} \\ \Phi'_{r\beta} \end{pmatrix} \quad (30)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \sin(p\theta + \mu) = -\frac{\Phi'_{r\alpha}}{\Phi_r} \\ \sin(p\theta + \mu) = \frac{\Phi'_{r\beta}}{\Phi_r} \end{cases}$$

avec  $\Phi_r(\theta) = \sqrt{\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2} = \Phi'_{rqe}(\theta)$ ; norme du vecteur représentatif de la dérivée du flux

induit par les aimants du rotor. L'angle  $\mu$  dépend à priori de la position du rotor (figure. 7) et on peut vérifier que dans le cas d'une machine à distribution sinusoïdale, on a  $\mu=0$ .



**Figure 7.** Évolution de l'angle  $\mu$  en fonction de la position électrique.

Le principal avantage de cette transformation réside cependant dans le fait que le couple ne dépend plus que d'une composante du courant statorique, ce qui réduit le problème de la commande à un problème mono-variable de poursuite d'une référence de courant dépendant de la position électrique.

Cette réduction à un problème mono-variable est réalisée sans dégradation du niveau des pertes par effet Joule dans la machine et donc en maintenant un ratio de conversion d'énergie maximal puisqu'elle est réalisée en orientant à tout instant le vecteur des courants statoriques en alignement avec le vecteur représentatif de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor (Fig. 8).

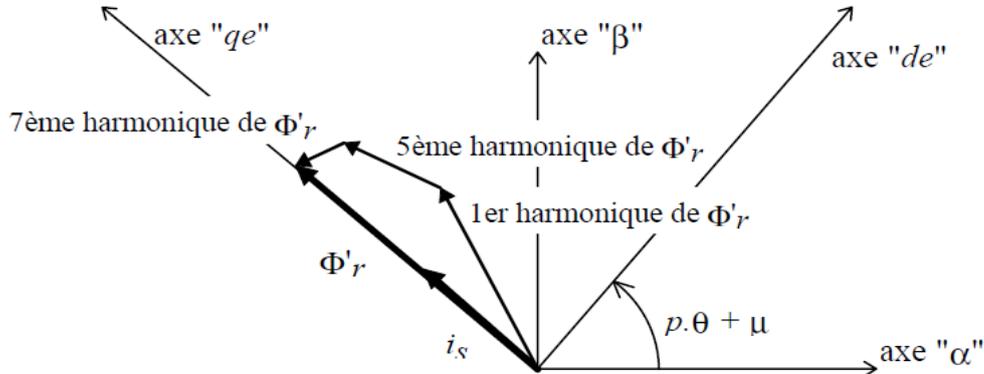


Figure 8. Orientation des flux dans le repère de Park étendu.

## 5.2 Applications de la transformation de Park étendue

Elle est utile pour la commande des machines à flux non-sinusoïdale.

Une première application de cette transformation c'est le calcul des courants optimaux à imposer dans les phases du stator pour avoir un couple de référence  $C_{ref}$  donné.

Dans le repère de Park étendu, on calcule la valeur de référence de la composante " $i_{qe}$ " des courants à imposer :

$$i_{qe\_ref} = \frac{C_{ref}}{p\Phi'_r} \quad (31)$$

L'amplitude de  $\Phi'_r$  dépendant de la position (Fig. 9), la valeur  $i_{qeref}$  varie également avec la position électrique du moteur (Fig. 10).

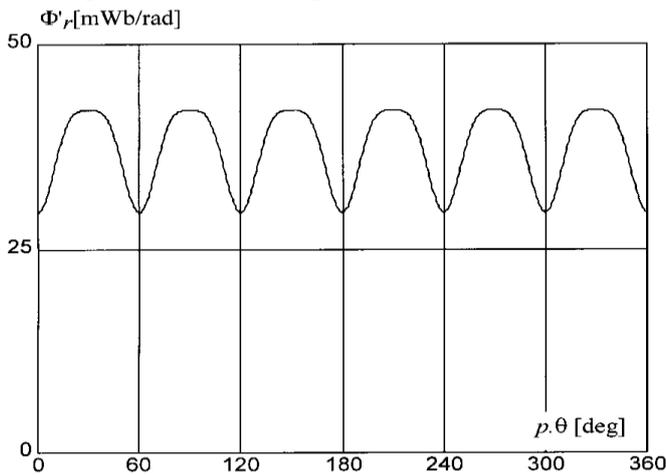


Figure 9. Evolution de  $\Phi'_r$  en fonction de la position électrique

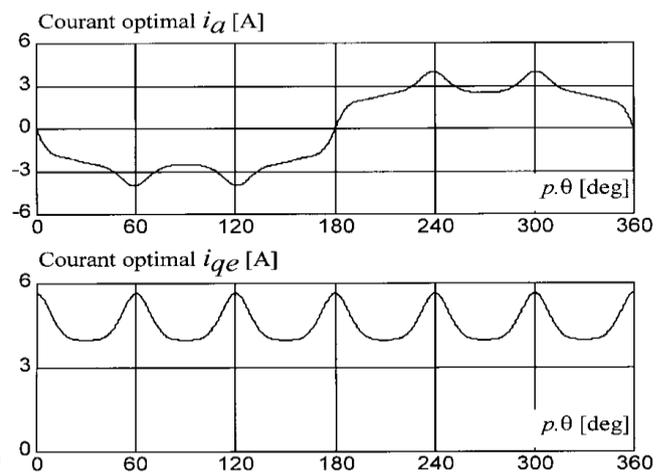


Figure 10. Courants optimaux en fonction de la position électrique, calculés pour un couple de référence égal à 1 Nm

Pour calculer les courants de phases correspondants, il est nécessaire de choisir une valeur de référence pour la composante " $i_{de}$ ", par exemple  $i_{de\ ref} = 0$  de façon à minimiser les pertes dans la machine. En utilisant la transformation de Park étendue, on calcule alors :

$$\begin{pmatrix} i_{a\_ref} \\ i_{b\_ref} \\ i_{c\_ref} \end{pmatrix} = T_{32} P_e(p\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ i_{qe\_ref} \end{pmatrix} = \frac{c_{ref}}{p\Phi_r'^2} \begin{pmatrix} \Phi_{ra}' \\ \Phi_{rb}' \\ \Phi_{rc}' \end{pmatrix} \quad (32)$$

L'évolution des courants de références est montré sur la figure 9.  $i_b$  et  $i_c$  sont décalés de 120 et 270 successivement.

La transformation de Park étendue permet cependant de proposer une autre stratégie de commande, à savoir une commande en courant directement dans le repère de Park étendue (Fig. 11).

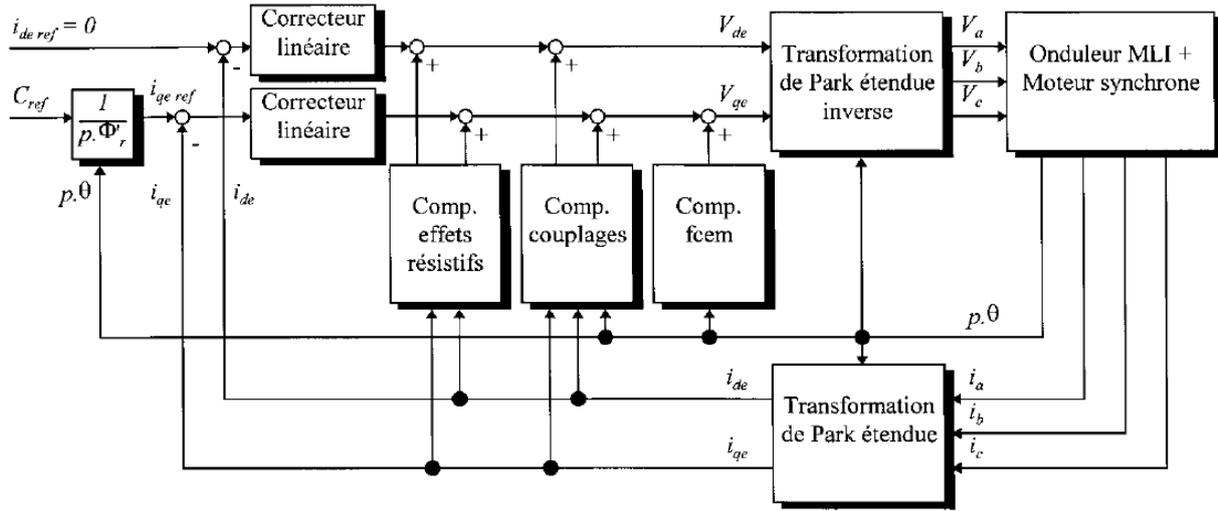


Figure 11. Commande dans le repère de Park étendue du moteur synchrone à aimants permanents montés en surface.

Des compensations des effets résistifs, des effets de couplages ou des forces contre-électromotrices peuvent éventuellement être introduites. Ces termes correspondent respectivement aux premiers, troisièmes et quatrièmes termes des équations aux tensions du moteur.

$$V_{de} = R_s i_{de} + (L_s - M_s) \frac{di_{de}}{dt} - p\Omega(L_s - M_s) \left(1 + \frac{d\mu}{d(p\theta)}\right) i_{qe} \quad (33)$$

$$V_{qe} = R_s i_{qe} + (L_s - M_s) \frac{di_{qe}}{dt} + p\Omega(L_s - M_s) \left(1 + \frac{d\mu}{d(p\theta)}\right) i_{de} + p\Omega\Phi_r' \quad (34)$$

### 5.3 Evaluation du gain en couple résultant de cette nouvelle orientation des axes

Dans le repère de Park classique, par exemple, les composantes "d" et "q" du vecteur représentatif de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor s'écrivent en effet :

$$\Phi_{rd}' = -\Phi_r' \sin(\mu) \quad \text{et} \quad \Phi_{rq}' = -\Phi_r' \cos(\mu) \quad (35)$$

Si l'on reporte ces valeurs dans l'équation (26) et que l'on impose  $i_d = 0$ , l'expression du couple devient :

$$C = p\Phi_r' \cos(\mu) i_q \quad (36)$$

Les deux transformations (Park et Park étendue) étant des transformations orthonormées, l'amplitude maximale des courants  $i_d$  et  $i_{qe}$  que l'on peut imposer dans les phases de la machine sont identiques. Elles sont déterminées par le courant maximal qui peut transiter dans les interrupteurs de l'onduleur utilisé. Le couple maximal que l'on peut obtenir de ce moteur alimenté à  $i_d = 0$  est donc réduit d'un facteur  $[1 - \cos(\mu)]$  par rapport à celui que l'on peut obtenir en travaillant à  $i_{de} = 0$ .

Dans le cas des machines à forces contre électromotrices rectangulaires, l'angle  $\mu$  pouvant atteindre jusqu'à 30 degrés, ceci peut représenter une réduction du couple maximum de 15 %.

## 6 Dénormalisation de l'extension de la transformation de Park

Appliquée au cas des machines à distribution de flux sinusoïdale, la transformation de Park classique présente quatre propriétés.

P1 : elle définit un repère orthogonal.

P2 : normée.

P3 : orientation du flux tel que le couple est fonction d'une seule composante.

P4 : le facteur de proportionnalité entre la composante "q" du courant et le couple est indépendant de la position.

Dans le cas des machines à distribution de flux non sinusoïdale, on a défini le repère de Park étendu, trois des propriétés précédentes sont conservées (P1=orthogonalité, P2 = repère normé et P3=orientation), **reste la constante du couple qui est dépendante de la position du rotor**. Donc la solution réside de trouver une nouvelle transformation pour conserver les quatre propriétés, qui est Park étendu, notée  $\mathbf{P}_{ed}(p\theta)$ .

On note  $\mathbf{p}_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ), les coefficients de la matrice  $\mathbf{P}_{ed}(p\theta)$ . on a :

$$P_{ed}(p\theta) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Les composantes "ded" et "qed" dans ce nouveau repère d'un vecteur  $\bar{x}_2$  s'expriment alors, en fonction de ses coordonnées  $x_\alpha$  et  $x_\beta$ , par :

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = P_{ed}(p\theta) \begin{pmatrix} x_{ded} \\ x_{qed} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Les coefficients  $\mathbf{p}_i$  dépendent à priori de la position électrique du moteur. Ils doivent satisfaire à un certain nombre de conditions.

En premier lieu, il est nécessaire que la matrice  $\mathbf{P}_{ed}(p\theta)$  soit inversible.  **$\det(\mathbf{P}_{ed}(p\theta)) \neq 0$** .

$$\text{Condition 1 : } p_1 p_4 - p_2 p_3 \neq 0.$$

Il convient ensuite que les axes du nouveau repère soit correctement orientés, c'est-à-dire qu'un des deux axes coïncide à tout instant avec la direction du vecteur représentatif de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor. Par analogie au cas sinusoïdal, on impose  $\Phi'_{r_{ded}} = 0$  (propriété P3), ce qui revient à imposer :

$$\text{Condition 2 : } p_4 \Phi'_{r_\alpha} - p_2 \Phi'_{r_\beta} = 0$$

Le couple électromagnétique s'écrit alors :

$$C = p(i_{ded} \ i_{qed}) (P_{ed}(p\theta))^t P_{ed}(p\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi'_{r_{qed}} \end{pmatrix}$$

$$C = p(i_{ded} \ i_{qed}) \begin{pmatrix} p_1^2 + p_3^2 & p_1 p_2 + p_3 p_4 \\ p_1 p_3 + p_2 p_4 & p_2^2 + p_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi'_{r_{qed}} \end{pmatrix}$$

Pour que ce couple soit en fonction d'une seule composante du vecteur des courants, la composante "qed", il est nécessaire donc d'avoir:

$$\text{Condition 3 : } p_1 p_2 + p_3 p_4 = 0$$

ce qui assure l'orthogonalité du nouveau repère (propriété P1).

Enfin pour le facteur de proportionnalité entre le couple et la composante "qed" du courant soit une constante, indépendante de la position (propriété P4), il est nécessaire d'avoir :

**Condition 4 :**

$$\frac{(-p_3\Phi'_{r\alpha} + p_1\Phi'_{r\beta})(p_2^2 + p_4^2)}{p_1p_4 - p_2p_3} = k = \text{constante}$$

Les quatre conditions ci-dessus ne déterminent pas la transformation  $\mathbf{Ped}(p\theta)$  de façon univoque. Parmi toutes les transformations qui satisfont ces conditions, la transformation d'état suivante a été présentée, qui a la particularité d'être, dans le cas sinusoïdal, égale à la transformation de Park et d'en constituer une véritable extension.

$$P_{ed}(p\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{2\Phi'_{r\beta}}{3\Phi'_m} & \frac{\Phi'_m\Phi'_{r\alpha}}{\Phi_r'^2} \\ -\frac{2\Phi'_{r\alpha}}{3\Phi'_m} & \frac{\Phi'_m\Phi'_{r\beta}}{\Phi_r'^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \cos(p\theta + \mu) & -\lambda \sin(p\theta + \mu) \\ \frac{1}{\lambda} \sin(p\theta + \mu) & \lambda \cos(p\theta + \mu) \end{pmatrix}$$

$\Phi'_m$  est l'amplitude du premier harmonique de la dérivée du flux induit par les aimants du rotor. C'est une valeur constante, indépendante de la position du rotor.

On définit en outre :

$$\lambda(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Phi'_m}{\Phi'_r}$$

Les éléments  $p_i$  de cette matrice  $\mathbf{Ped}(p\theta)$  sont représentés sur la figure 12, en fonction de la position électrique du rotor.

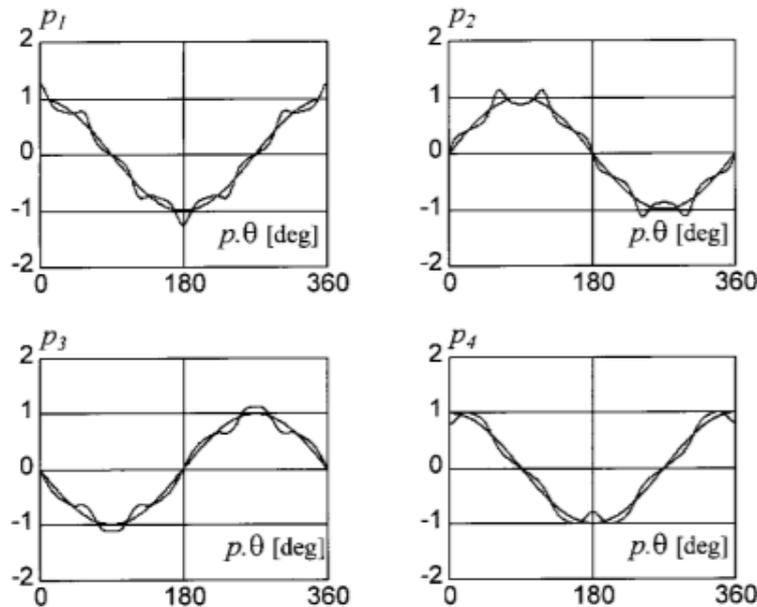


Figure (12) : Evolution des éléments de la matrice de la transformation de Park étendue dénormalisée en fonction de la position électrique et de leur premier harmonique.

### Bibliographie:

1. Jean Paul Louis, « modèles pour la commande des actionneurs électriques » lavoisier, 2004.
2. D. Grenier, S. Yala, et J.-P. Louis ; « Définition d'extensions de la transformation de Park pour la commande de moteurs synchrones à aimants permanents montés en surface », The European Physical Journal Applied Physics - EDP Sciences 1998
3. Control of Synchronous Motors / Jean-Paul Louis / ISTE Ltd 2011.
4. J. Holtz, L. Springob, IEEE Trans. Ind. Electronics 43,309 (1996).
5. F. Colamartino, C. Marchand, « A Fast and Robust Current Controller in Permanent Magnet Synchronous Motor », Control in Proceedings of the ICEM Conference, Vigo(Spain), September 10-12, 1996, Vol. 2, pp. 235-239