حل البرامج الخطية:

طريقة السمبلكس (Simplex)

يتم إستخدام طريقة السمبلكس (أو طريقة الجداول كما تُسمى أحيانا) في حل جميع مسائل البرمجة الخطية القابلة للحل، ومهما كان عدد متغيراتها، حيث رأينا أن الطريقة البيانية تقتصر على حل البرامج الخطية التي تحتوي على متغيرتين فقط، أما طريقة السمبلكس فهي طريقة عامة وذات امكانيات هائلة.

1. خطوات الحل بطريقة السمبلكس:

الخطوة الأولى: تحويل كل متباينات القيود إلى معادلات (التحول الى الصيغة النموذجية)

في حالة قيد " أصغرمن أو يساوي" :

- نظيف متغيرة مكملة نرمز لها بـ X_j^C، حيث "j" هو ترتيب المتغيرة، و"c" تعني مكملة أي **c**omplémentaire
- ينبغي إدخال المتغيرات المكملة إلى دالة الهدف لكن بمعاملات تساوي الصفر.

في حالة قيد " أكبر من أو يساوي" (تقنية M الكبيرة):

- نطرح متغيرة مكملة نرمز لها بـ X_j^C ، حيث "j" هو ترتيب المتغيرة، و"c" تعني مكملة أي **c**omplémentaire
- يتم الاستعانة بمتغيرات اصطناعية X_j^a يُفترض أن تكون قيمتها معدومة ومعاملها يساوي 1+ حيث "j" هو ترتيب المتغيرة و"a" تعني اصطناعية أي **a**rtificielle
- ينبغي إدخال المتغيرات المكملة والإصطناعية إلى دالة الهدف، الأولى بمعاملات تساوي الصفر، والثانية بمعاملات يُفترض أن تكون كبيرة جدا يُرمز إليها بـ "M"، وتكون إشارة هذه الأخيرة كما يلي:

- **في حالة التعظيم**: سالبة
- **في حالة التدنية**: موجبة

في حالة قيد "يساوي":

- يتم الاستعانة بمتغيرات إصطناعية X_j^a يُفترض أن تكون قيمتها معدومة ومعاملها يساوي +1
- ينبغي إدخال المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف مع معاملات يُفترض أن تكون كبيرة جدا يُرمز إليها بـ "M"، وتكون إشارة هذه الأخيرة كما يلي:

- في حالة التعظيم: سالبة

- في حالة التدنية: موجبة

مثال:

$$Z_{max}=c_1x_1+c_2x_2$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 = b_3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1- التحول إلى الصيغة النموذجية:

$$Z_{max}=c_1x_1+c_2x_2 +0x^c_3 +0x^c_4 -M\, x^a_5 - M\, x^a_6$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 + x^c_3 = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 - x^c_4 + x^a_5 = b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 + x^a_6 = b_3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x^c_3 \geq 0,\ x^c_4 \geq 0,\ x^a_5 \geq 0,\ x^a_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z_{max}=c_1x_1+c_2x_2 \ +0x^c_3 \ +0x^c_4 \ -M\ x^a_5 - M\ x^a_6$$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ x^c_3 =b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 - x^c_4 + x^a_5 =b_2$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2 + x^a_6 = b_3$$

<u>الخطوة الثانية</u>: كتابة جدول الحل الأساسي الأول

يتم كتابة جدول الحل الأساسي الأول حسب الجدول التالي:

Ci	Xi							b_i
		$-a_{21}M - a_{31}M$ x_1	$-a_{22}M - a_{32}M$ x_2	0 x_3^c	M x_4^c	-M x_5^a	-M x_6^a	
0	x_3^c	$c_1+M(a_{21}+ a_{31})$ a_{11}	$c_2+M(a_{22}+ a_{32})$ a_{12}	0 1	-M 0	0 0	0 0	$Z= -M(b_2+b_3)$ b_1
-M	x_5^a	a_{21}	a_{22}	0	-1	1	0	b_2
-M	Cj x_6^a	a_{31}	a_{32}	0	0	0	1	b_3
	Zj	c_1	c_2	0	0	-M	-M	
	Δ_j							

<u>حيث</u>:

X_i: متغيرات الأساس.

C_i: معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف.

C_j: معاملات دالة الهدف الأصلية.

Δ_j: معاملات دالة الهدف بالنسبة لهذا الحل. $\Delta j = C_j - Z_j$

$$Z_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} C_i$$

n= عدد القيود

$$Z = \sum b_i c_i$$

$$Z_{max}=c_1x_1+c_2x_2 +0x^c_3 +0x^c_4 -M x^a_5 - M x^a_6$$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ x^c_3 =b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 - x^c_4 + x^a_5 =b_2$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2 + x^a_6 = b_3$$

الخطوة الثانية: كتابة جدول الحل الأساسي الأول

يتم كتابة جدول الحل الأساسي الأول حسب الجدول التالي:

Ci	Xi	x_1	x_2	x^c_3	x^c_4	x^a_5	x^a_6	b_i
0	x^c_3	a_{11}	a_{12}	1	0	0	0	b_1
-M	x^a_5	a_{21}	a_{22}	0	-1	1	0	b_2
-M	x^a_6	a_{31}	a_{32}	0	0	0	1	b_3
	C_j	c_1	c_2	0	0	-M	-M	
	Zj	$-a_{21}M - a_{31}M$	$-a_{22}M - a_{32}M$	0	M	-M	-M	
	Δ_j	$c_1+M(a_{21}+ a_{31})$	$c_2+M(a_{22}+ a_{32})$	0	-M	0	0	$Z= -M(b_2+b_3)$

الخطوة الثالثة: الأمثلية

يكون الحل أمثل عندما:

- **في حالة التعظيم:** تكون كل عناصر Δ_j سالبة أو معدومة.
- **في حالة التدنية:** تكون كل عناصر Δ_j موجبة أو معدومة.

وإذا لم يتحقق الحل الأمثل فإننا ننتقل إلى الخطوة الرابعة

الخطوة الرابعة: البحث عن الحلول الأساسية التالية

في حالة عدم تحقق الأمثلية فإننا نكتب الحل الأساسي التالي كما يلي:

البحث عن عمود الإرتكاز لتحديد المتغيرة التى تدخل إلى الأساس:

في حالة التعظيم: نحدد أكبر قيمة موجبة في السطر"Δ_j"، والمتغيرة التي تمثل العمود الذي يحتوي على هذه القيمة هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس.

في حالة التدنية: نحدد أقل قيمة من بين القيم السالبة في السطر "Δ_j"، والمتغيرة التي تمثل العمود الذي يحتوي على هذه القيمة هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس.

في حالة تساوي أكبر قيمتين موجبتين أو أكثر في حالة التعظيم، أو تساوي أقل قيمتين من بين القيم السالبة في حالة التدنية، فإنه يتم إختيار إحداهما.

البحث عن صف الإرتكاز لتحديد المتغيرة التى تخرج من الأساس:

نقسم عمود الثوابت bi على القيم الموجبة في عمود الإرتكاز، والصف التي تنتمي إليه أصغر قيمة موجبة هو صف الإرتكاز، والمتغيرة الواقعة في هذا الصف في العمود X_i هي المتغيرة التي تخرج من الأساس. وفي حالة قيمة من قيم bi معدومة، فإنه يتم إختيار الصف الذي تنتمي إليه هذه القيمة بشرط أن تكون القيمة المقابلة في عمود الإرتكاز قيمة موجبة.

عنصرالإرتكاز:

هي نقطة تقاطع عمود الإرتكاز وصف الإرتكاز

ويتم إعداد جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

- نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل إلى الأساس وذلك في العمود X_i؛

- نقوم بتحويل عمود الإرتكاز إلى عمود أحادي، حيث يتحول عنصر الإرتكاز إلى القيمة 1 وباقي عناصر العمود إلى قيم معدومة؛

- يتم تحويل سطر الإرتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الإرتكاز.

- أما باقي العناصر فيتم حسابها على النحو التالي: العنصر المرشح للتغيير نطرح منه مضروب العنصرين المقابلين له في كل من سطر الإرتكاز وعمود الإرتكاز مقسوما على قيمة عنصر الإرتكاز.

فإذا افترضنا أن القيمة A في الجدول التالي هي عنصر الإرتكاز:

A	B
C	D

فإن عملية التحويل تكون كما يلي:

1	$\frac{B}{A}$
0	$D-\left(\frac{B\times C}{A}\right)$

وبعد الانتهاء من إعداد جدول الحل الأساسي التالي، نعود مرة أخرى إلى الخطوة رقم 3. وعند تحقق الأمثلية فإن المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي القيم المقابلة لها في عمود الثوابت، وبقية المتغيرات تكون معدومة، أما قيمة دالة الهدف المثلى فهي عبارة عن قيمة Z.

مثال:

$$Z_{max}=6x_1+7x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1+3x_2\leq 12 \\ 2x_1+x_2\leq 8 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

الحل:

التحول من جملة متباينات إلى جملة معادلات:

$$Z_{max}= 6x_l+7x_2\ +0\ x^c{}_3\ +0\ x^c{}_4$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1+3x_2+ x^c{}_3 \ =12 \\ 2x_l+x_2\ +\ x^c{}_4\ =8 \\ x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0\ ,\ x^c{}_3\geq 0\ ,\ x^c{}_4\geq 0 \end{cases}$$

$$Z_{max} = 6x_1 + 7x_2 + 0\,x^c_3 + 0\,x^c_4$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x^c_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x^c_4 = 8 \\ x_1 \geq 0 \,,\ x_2 \geq 0 \,,\ x^c_3 \geq 0 \,,\ x^c_4 \geq 0 \end{cases}$$

<u>جدول الحل الأساسى رقم 1:</u>

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	b_i	bi/x^*_{ij}
0	X_3^c	2	3	1	0	12	4
0	X_4^c	2	1	0	1	8	8
	Cj	6	7	0	0		
	Z_j	0	0	0	0		
	Δ_j	6	7	0	0	Z=0	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

جدول الحل الأساسي رقم 2:

C_i	X_i	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	b_i	b_i/x^*_{ij}
7	X_2	2/3	1	1/3	0	4	6
0	X_4^c	4/3	0	-1/3	1	4	3
	C_j	6	7	0	0		
	Z_j	14/3	7	7/3	0		
	Δ_j	4/3	0	-7/3	0	Z=28	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

جدول الحل الأساسي رقم 3:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	b_i
7	X_2	0	1	1/2	-1/2	2
6	X_1	1	0	-1/4	3/4	3
	C_j	6	7	0	0	
	Z_j	6	7	2	1	
	Δ_j	0	0	-2	-1	Z=32

وبما أن جميع قيم Δ_jأصبحت سالبة أو معدومة فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. ومنه فإن القيم المثلى للمتغيرات هي:

$x_1=3$

$x_2=2$

والربح الكلي الأقصى هو:

$Z_{max}=32$ وحدة نقدية

مثال:

$$Z_{min}=3x_1+10x_2$$

$$s/c\begin{cases}5x_1+6x_2\geq 10\\2x_1+7x_2\geq 14\\x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\end{cases}$$

الحل:

التحول من جملة متباينات إلى جملة معادلات:

$$Z_{min}=3x_1+10x_2\ +0\ x^c_3\ +M\ x^a_4\ +0\ x^c_5\ +Mx^a_6$$

$$s/c\begin{cases}5x_1+6x_2\ -x^c_3\ +x^a_4\ =10\\2x_1+7x_2\ -x^c_5\ +x^a_6=14\\x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0\ ,\ x^c_3\geq 0\ ,\ x^a_4\geq 0\ ,\ x^c_5\geq 0\ ,\ x^a_6\geq 0\end{cases}$$

$$Z_{min}=3x_1+10x_2+0\,x^c_3+M\,x^a_4+0\,x^c_5+Mx^a_6$$

$$s/c\begin{cases}5x_1+6x_2-x^c_3+x^a_4=10\\2x_1+7x_2-x^c_5+x^a_6=14\\x_1\geq 0\,,\ x_2\geq 0\,,\ x^c_3\geq 0\,,\ x^a_4\geq 0\,,\ x^c_5\geq 0\,,\ x^a_6\geq 0\end{cases}$$

جدول الحل الأساسى رقم 1:

Ci	Xi	x_1	x_2	x^c_3	x^a_4	x^c_5	x^a_6	b_i	b_i/x^*_{ij}
M	x^a_4	5	6	-1	1	0	0	10	5/3
M	x^a_6	2	7	0	0	-1	1	14	2
	C_j	3	10	0	M	0	M		
	Z_j	7M	13M	-M	M	-M	M		
	Δ_j	3-7M	10-13M	M	0	M	0	Z=24M	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

جدول الحل الأساسي رقم 2:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^a	x_5^c	x_6^a	b_i	b_i/x^*_{ij}
10	x_2	5/6	1	-1/6	1/6	0	0	5/3	-10
M	x_6^a	-23/6	0	7/6	-7/6	-1	1	7/3	2
	C_j	3	10	0	M	0	M		
	Zj	25/3-23/6M	10	-5/3+7/6M	5/3-7/6M	-M	M		
	Δ_j	-16/3+23/6M	0	5/3-7/6M	-5/3+13/6M	M	0	Z=50/3+7/3M	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

جدول الحل الأساسي رقم 3:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^a	x_5^c	x_6^a	b_i
10	x_2	2/7	1	0	0	-1/7	1/7	2
0	x_3^c	-23/7	0	1	-1	-6/7	6/7	2
	C_j	3	10	0	M	0	M	
	Zj	20/7	10	0	0	-10/7	10/7	
	Δ_j	1/7	0	0	M	10/7	M-10/7	Z=20

وبما أن جميع قيم Δ_jأصبحت موجبة أو معدومة فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. ومنه فإن القيم المثلى للمتغيرات هي:

$x_1=0$

$x_2=2$

$x^c_3=2$

والتكلفة الكلية هي:

Z=20 وحدة نقدية

2. حالات خاصة

1- *عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات:*

1.1. إذا كان المتغير سالبا: $X_j \le 0$: في هذه الحالة يتم افتراض أن $X_j = -X_j'$ حيث $X_j' \ge 0$ ثم يتم تعويض المتغير الجديد في البرنامج الأصلي ثم نقوم بحل البرنامج بطريقة عادية حتى نصل إلى الحل الأمثل وبعد ذلك نحول المتغير X_j' إلى أصله وفق التحويل الأولي.

مثال:

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0 \end{cases}$$

نفترض أن: $X_2 = -X_2'$

وبعد تعويض في البرنامج الأصلي نحصل على البرنامج التالي:

$$Z_{max} = c_1x_1 - c_2x'_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x'_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x'_2 \le b_2 \\ x_1 \ge 0,\ x'_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.1.إذا كان المتغير حرا أي $X_j \in (-\infty, +\infty)$: في هذه الحالة يتم افتراض أن $X_j = X_j' - X_j''$ حيث: $X_j' \geq 0$ و $X_j'' \geq 0$ ثم يتم تعويض المتغير وفق التحويل الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نقوم بحل البرنامج بطريقة عادية حتى نصل إلى الحل الأمثل وبعد ذلك نقوم بإيجاد قيمة المتغير الأصلي وفق صيغة التحويل السابقة.

مثال:

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2\ \forall \end{cases}$$

نفترض أن: $X_2 = X_2' - X_2''$

وبعد تعويض في البرنامج الأصلي نحصل على البرنامج التالي:

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2(x_2' - x_2'')$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}(x'_2 - x_2'') \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}(x'_2 - x_2'') \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2' - c_2x_2''$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2' - a_{12}x_2'' \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2' - a_{22}x_2'' \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

2- إنعدام وجود حل أمثل:

إذا وصلنا إلى حالة الحل الأمثل سواء في حالة التعظيم أو التدنية وبقيت هناك متغيرة إصطناعية أو أكثر داخل الأساس فإن هذا معناه عدم وجود حل امثل وهو يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج.

مثال:

لنفترض أن الجدول الحل الأساسي التالي هو الجدول الأخير عند حل برنامج خطي في حالة التعظيم حيث جميع عناصر Δ_j أصبحت كلها سالبة ومعدومة.

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^a	b_i
5	x_2	-1/2	1	-3	0	7
-M	x_4^a	-1	0	-2	1	9
	C_j	3	5	0	-M	
	Zj	-5/2+M	5	-15+2M	-M	
	Δ_j	-1/2-M	0	15-2M	0	Z=35-9M

3-عدم محدودية الحل:

وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود الإرتكاز اقل أو تساوي صفر، حيث يستحيل اختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس.

مثال:

ليكن جدول الحل الأساسي التالي لبرنامج خطي في حالة التعظيم:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^c	b_i	bi/x^*_{ij}
3	x_1	1	0	1/2	0	6	-
0	x_4^c	0	-2	1	1	9	-9/2
	c_j	3	4	0	0		
	Zj	3	3	3/2	0		
	Δ_j	0	1	-3/2	0	Z=18	

عمود الإرتكاز

4- ما لا نهائية الحلول المثلى:

تحدث هذه الحالة إذا أخذت على الأقل متغيرة من متغيرات خارج الأساس قيمة معدومة في السطر Δ_j من جدول الحل الأمثل، حيث يؤدي هذا إلى حالة ما لا نهائية الحلول المثلى، بمعنى أنه يُمكن الحصول على نفس قيمة دالة الهدف بأكثر من تشكيلة من متغيرات الأساس. ومثل هذه الحالة تتيح للإدارة إختيارات غير محدودة عند عملية إتخاذ القرار.

مثال:

ليكن جدول الحل الأساسي التالي لبرنامج خطي في حالة التعظيم:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	b_i
1	X_1	1	0	1/2	-5/4	15/4
1	X_2	0	1	-1/2	7/4	7/4
	c_j	1	1	0	0	
	Zj	1	1	0	1/2	
	Δ_j	0	0	0	-1/2	Z=11/2

وقيم الحل المثلى هي:

$$X_1=\frac{15}{4}, X_2=\frac{7}{4}, X_3^c=0, X_4^c=0, Zmax=\frac{11}{2}$$ وحدة نقدية

ويُلاحظ أن المتغيرة غير الأساسية X_3^c قيمتها في السطر Δ_j صفر، وبالتالي فنحن أمام حالة ما لا نهائية الحلول المثلى. ويُمكن توضيح كيفية إيجاد حل أمثل جديد بدون تغيير في دالة الهدف من خلال إدخال المتغيرة X_3^c إلى الأساس كما يلي:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	b_i
0	X_3^c	2	0	1	-5/2	15/2
1	X_2	1	1	0	1/2	11/2
	c_j	1	1	0	0	
	Zj	1	1	0	1/2	
	Δ_j	0	0	0	-1/2	Z=11/2

وهذا الجدول هو جدول حل أمثل، ونقطة الحل الأمثل الجديدة هي:

$$X_1 = 0, X_2 = \frac{11}{2}, X_3^c = 0, X_4^c = 0, Zmax \ = \frac{11}{2}$$ وحدة نقدية

ويُلاحظ بقاء نفس قيمة دالة الهدف. كما يُلاحظ أيضاً أن المتغيرة خارج الأساس X_1 قيمتها في السطر الأخير Δ_j صفر، وبالتالي يُمكن أن تدخل إلى الأساس بدون تغير في قيمة دالة الهدف.

5- التفكك (الإنحلال):

نكون أمام هذه الحالة عندما تتساوى قيمتين على الأقل من القيم المتحصل عليها من قسمة قيم عمود الثوابت على القيم المقابلة لها في عمود الإرتكاز وهو ما يعني وجود متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس. وعند حدوث مثل هذه الحالة فإننا نختار إحدى القيم.

مثال :

لنفترض أن الجدول التالي هو جدول حل أساسي لبرنامج خطي في حالة التعظيم:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^c	b_i	bi/x^*_{ij}
0	x_3^c	4	2	1	0	8	2
0	x_4^c	6	1	0	1	12	2
	C_j	5	2	0	0		
	Zj	0	0	0	0		
	Δ_j	5	2	0	0	Z=0	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

يُلاحظ تساوي القيمتان المتحصل عليهما من قسمة قيمتا عمود الثوابت على القيم المقابلة لهما في عمود الإرتكاز. ويُمكن إختيار إحداهما، وبالتالي يُمكن إخراج إما المتغيرة X_3^c أو المتغيرة X_4^c .

ملاحظة: إذا كانت إحدى المتغيرات من بين متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس هي متغيرة إصطناعية فمن الأفضل إخراج هذه المتغيرة.