المسألة الثنائية

1- المسألة الثنـــائيـــة:

تتوفر كل مشكلة يُمكن صياغتها تحت شكل برنامج خطي على نموذجان: الأول يُطلق عليه بالنموذج الأولي (الأصلي) والذي يتم صياغته من خلال معطيات المشكلة المطروحة، والثاني عبارة عن مشكلة مناظرة للمشكلة الأولى يُطلق عليه بالنموذج الثنائي أو المقابل والذي يتم الحصول عليه بتحويل النموذج الأولي.

ومن مميزات النموذج المقابل أو الثنائي:

- يساعد في بعض الأحيان على التوصل إلى الحل الأمثل بشكل أسرع من إستخدام البرنامج الخطي الأولي، وذلك بتقليص خطوات الحل؛
- التخلص من القيم السالبة في الطرف الأيمن من القيود إن وُجدت في البرنامج الخطي الأولي؛
- في حالة وجود قيمة سالبة لأحد المتغيرات الأساسية في النموذج الثنائي، فإنه يمكن إيجاد الحل الأمثل له، في حين لا يُمكن إيجاد الحل في هذه الحالة إذا كان النموذج أولي؛
- يساعد على إجراء تحليل ما بعد الأمثلية أو تحليل الحساسية؛

2- خطوات تحويل برنامج خطي أولي إلى برنامج خطي ثنائي (مقابل):

إذا كان البرنامج الخطي الأولي كما يلي:

برنامج خطي أولي

$$Z_{max}=CX$$
$$s/c\begin{cases}AX\leq B\\ X\geq 0\end{cases}$$

برنامج خطي ثنائي

$$Z_{min}=B'Y$$
$$s/c\begin{cases}A'Y\geq C'\\ Y\geq 0\end{cases}$$

حيث أنه لإيجاد البرنامج الثنائي لأي برنامج خطي أولي نتبع الخطوات التالية:

1- قلب صيغة دالة الهدف: إذا كانت صيغة دالة الهدف في البرنامج الخطي الأولي هي .Min، فإنها تتحول إلى .Max في البرنامج الخطي المقابل، وإذا كانت صيغتها هي .Max فإنها تتحول إلى .Min؛

2- إذا كانت متغيرات البرنامج الخطي الأولي هي $x_1,x_2,x_3,\ldots x_n$، فإن متغيرات البرنامج الخطي المقابل هي $y_1,y_2,y_3,\ldots y_m$، حيث m هو عدد قيود البرنامج الخطي الأولي؛

3- قيم الطرف الأيمن من القيود في البرنامج الخطي الأولي تتحول إلى معاملات المتغيرات في دالة الهدف في البرنامج الخطي المقابل؛

4- معاملات كل متغيرة في قيود البرنامج الخطي الأولي حسب ترتيب القيود تتحول إلى معاملات متغيرات قيود البرنامج الخطي المقابل حسب نفس الترتيب؛

5- معاملات المتغيرات في دالة الهدف في البرنامج الخطي الأولي تتحول إلى قيم الطرف الأيمن من القيود في البرنامج الخطي المقابل بنفس الترتيب؛

6- إذا كانت إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الأولي "أكبر من أو تساوي" فإن القيد رقم i في البرنامج الخطي الثنائي يكون عبارة عن متباينة "أصغر من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، ومتباينة "أكبرمن أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التدنية.

7- إذا كانت إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الأولي "أصغر من أو تساوي" فإن القيد رقم i في البرنامج الخطي الثنائي يكون عبارة عن متباينة "أكبر من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، ومتباينة «أصغر من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التدنية.

8- إذا كانت إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الأولي حرة، فإن القيد رقم i في البرنامج الخطي الثنائي يكون في صورة معادلة؛

9- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي عبارة عن معادلة فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون حرة؛

10- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي -حالة التعظيم- في صورة متباينة "أصغر من أو تساوي" فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون "أكبر من أو تساوي".

11- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي -حالة التعظيم- في صورة متباينة "أكبر من أو تساوي" فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون "أصغر من أو تساوي".

12- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي -حالة التدنية- في صورة متباينة "أكبر من أو تساوي" فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون "أكبر من أو تساوي".

13- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي -حالة التدنية- في صورة متباينة "أصغر من أو تساوي" فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون "أصغر من أو تساوي".

مثال:

$$Z_{min}=4x_1+3x_2+x_3$$

$$\text{s/c}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3\leq 6 \\ 4x_1+x_2+5x_3\geq 3 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=9 \\ x_1\geq 0,\ x_2\ \forall,\ x_3\leq 0 \end{cases}$$

الحل:

$$Z_{max}= 6y_1+3y_2+9y_3$$

$$\textbf{s/c}\begin{cases} y_1+4y_2+2y_3 \leq 4 \\ 3y_1+y_2+2y_3 = 3 \\ y_1+5y_2+4y_3 \geq 1 \\ y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3\ \forall \end{cases}$$

ملاحظات:

1- ثنائية البرنامج الخطي المقابل هي البرنامج الخطي الأولي.

2- إذا كانت صيغة البرنامج الخطي الأولي قانونية، فإن صيغة البرنامج الخطي الثنائي تكون قانونية أيضاً.

3- إذا كان حل البرنامج الخطي الأولي غير محدود، فإن حل البرنامج الخطي المقابل يكون مستحيل.

4- إذا كان حل البرنامج الخطي الأولي مستحيل، فإن حل البرنامج الخطي المقابل يكون غير محدود أو مستحيل.

3- العلاقة بين الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي والحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل:

1- قيمة المتغيرة الحقيقية i في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة المكملة أو الإصطناعية التي تم إدخالها للقيد i في البرنامج الخطي المقابل في السطر الأخير Δ_j من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل (بالقيمة المطلقة). وفي حالة المتغيرات الإصطناعية يجب أولاً طرح القيمة الموجودة في السطر الأخير من M– في حالة التعظيم، ومن M في حالة التقليل.

2- قيمة المتغيرة المكملة i (إن وُجدت) في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة الحقيقية i في السطر الأخير Δ_j في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل (بالقيمة المطلقة).

3- قيمة دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي وجدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل تكون متساوية.

تمرين: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$Z_{max}=6x_1+7x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1+3x_2 \leq 12 \\ 2x_1+x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1-أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج؟

2- أوجد ثنائية هذا البرنامج ثم ابحث عن الحل الأمثل له؟

3-حدد العلاقة بين جدولي الحل الأمثل للبرنامج الأولي والبرنامج الثنائي؟

الحل:

1- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي: (هذا المثال تم حله سابقا)

2- إيجاد البرنامج الثنائي والحل الأمثل له

2-1 إيجاد البرنامج الثنائي :

$$Z_{min} = 12y_1 + 8y_2$$

$$s/c \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ 3y_1 + y_2 \geq 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

التحول من جملة متباينات إلى جملة معادلات:

$$Z_{min} = 12x_1 + 8x_2 + 0\,x^c_3 + M\,x^a_4 + 0\,x^c_5 + M\,x^a_6$$

$$2y_1 + 2y_2 - y^c_3 + y^a_4 = 6$$

$$3y_1 + y_2 - y^c_5 + y^a_6 = 7$$

الحل:

1- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي: (هذا المثال تم حله سابقا)

2- إيجاد البرنامج الثنائي والحل الأمثل له

2-1 إيجاد البرنامج الثنائي :

$$Z_{min} = 12y_1 + 8y_2$$

$$s/c \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ 3y_1 + y_2 \geq 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

التحول من جملة متباينات إلى جملة معادلات:

$$Z_{min} = 12x_1 + 8x_2 + 0\,x^c_3 + M\,x^a_4 + 0\,x^c_5 + M\,x^a_6$$

$$2y_1 + 2y_2 - y^c_3 + y^a_4 = 6$$

$$3y_1 + y_2 - y^c_5 + y^a_6 = 7$$

جدول الحل الأساسي رقم 1:

Ci	Yi	y_1	y_2	y^c_3	y^a_4	y^c_5	y^a_6	b_i	bi/x^*_{ij}
M	y^a_4	2	2	-1	1	0	0	6	3
M	y^a_6	3	1	0	0	-1	1	7	7/3 ← صف الإرتكاز
	C_j	12	8	0	M	0	M		
	Zj	5M	3M	-M	M	-M	M		
	Δ_j	12-5M	8-3M	M	0	M	0	Z=13M	

↑ عمود الإرتكاز

جدول الحل الأساسي رقم 2:

Ci	Yi	y_1	y_2	y_3^c	y_4^a	y_5^c	bi	bi/x^*_{ij}
M	y_4^a	0	4/3	-1	1	2/3	4/3	1
12	y_1	1	1/3	0	0	-1/3	7/3	7
	C_j	12	8	0	M	0		
	Zj	12	4+4/3M	-M	M	-4+2/3M		
	Δ_j	0	4-4/3M	M	0	4-2/3M	Z=28+4/3M	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

جدول الحل الأساسي رقم 3:

Ci	Yi	y_1	y_2	y_3^c	y_5^c	bi
8	y_2	0	1	-3/4	1/2	1
12	y_1	1	0	1/4	-1/2	2
	C_j	12	8	0	0	
	Zj	12	8	-3	-2	
	Δ_j	0	0	3	2	Z=32

وبما أن جميع قيم Δ_j أصبحت موجبة أو معدومة فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

3- تحديد العلاقة بين جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^c	b_i
7	X_2	0	1	1/2	-1/2	2
6	X_1	1	0	-1/4	3/4	3
	C_j	6	7	0	0	
	Zj	6	7	2	1	
	Δ_j	0	0	-2	-1	Z=32

جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

Ci	Yi	y_1	y_2	y_3^c	y_4^a	y_5^c	y_6^a	b_i
8	y_2	0	1	-3/4	3/4	1/2	-1/2	1
12	y_1	1	0	1/4	-1/4	-1/2	2/3	2
	C_j	12	8	0	M	0	M	
	Zj	12	8	-3	3	-2	2	
	Δ_j	0	0	3	M-3	2	M-2	Z=32

من خلال جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يُمكن استخراج قيم X_1 و X_2 كما يلي :

- قيمة المتغيرة الحقيقية الأولى X_1 في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة المكملة الأولى y_3^c في السطر الأخير Δ_j في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل بالقيمة المطلقة، أي:

$$X_1 = |Y_3^c|_{(\Delta_j)} = |3| = 3$$

- قيمة المتغيرة الحقيقية الأولى X_1 في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة المكملة الأولى y_5^c في السطر الأخير Δ_j في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل بالقيمة المطلقة، أي:

$$X_2 = |Y_5^c|_{(\Delta_j)} = |2| = 2$$

- قيمة المتغيرة المكملة X_3^c في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة الحقيقية Y_1 في السطر الأخير Δ_j في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل بالقيمة المطلقة، أي:

$$X_3^c = |Y_1|_{(\Delta_j)} = |0| = 0$$

- قيمة المتغيرة المكملة X_3^c في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي تساوي قيمة المتغيرة الحقيقية Y_2 في السطر الأخير Δ_j في جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المقابل بالقيمة المطلقة، أي:

$$X_4^c = |Y_2|_{(\Delta_j)} = |0| = 0$$