Centre universitaire Abedelhafid Boussouf – Mila
Institut des sciences et technologie
Département de mathématiques et informatique
1er année Master : Intelligence artificielle et ses applications – Année: 2022-2023
Matière : Modélisation et simulation

Série de TD 1

Exercice 01

Soit une chaîne de Markov à 2 états de matrice de transition P telle que $p_{1,2} = 0.25$ et $p_{1,2} = 0.5$.

1. Donnez la matrice de transition, et tracer le graphe de la chaine correspondant
2. Calculer la distribution π_1 sachant que la distribution initiale $\pi_0 = (0, 2, 0.8)$
3. Calculer le nombre x et x tel que $\pi = (x \quad \mathrm{y})$ soit une distribution stationnaire.

Exercice 02

Dans une région, s'il pleut un jour alors également le lendemain il pleut avec une probabilité égale à 0.7. De plus, s'il ne pleut pas un certain jour, alors, il pleut le lendemain avec un probabilité égale à 0.2.

1. Modéliser ce problème avec une chaine de Markov à temps discret
2. Donnez la matrice de transition, et tracer le graphe correspondant
3. Si aujourd'hui il pleut, quelle est la probabilité de pleuvoir dans 2 jours, et dans 5 jours ?
4. Peut-on en déduire que la matrice de transition de cette chaine de Markov est une matrice primitive ? Pourquoi?
5. Déterminer la distribution invariante de cette chaine
6. La chaine est-elle irréductible ?
7. La chaîne est-elle périodique ?

Exercice 03

L'observation du développement d'un organisme (animal ou plante) au cours du temps fait apparaitre l'ensemble des états suivants : juvénile, maturité, sénescence et décès, que nous noterons respectivement j, m, v et d, avec des probabilités de passage d'un état vers un autre données par la matrice suivante :

$$\mathrm{P} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc|c} \mathrm{j} & \mathrm{m} & \mathrm{s} & \mathrm{d} & \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.6 & \mathrm{j} \\ 0 & 0.55 & 0.15 & 0.3 & \mathrm{m} \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & \mathrm{s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{d} \end{array}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèche.
2. La chaine est-elle irréductible ?
3. Calculer la probabilité de passer en deux étapes de l'état de maturité à l'état de vieillesse. Calculer la matrice P^2 et vérifier la probabilité calculée précédemment.
4. Pour chaque état, indiquer s'il est absorbant, transitoire, récurrent.

Exercice 04

Considérons une population où les individus susceptibles d'attraper une maladie. Un individu de la population peut être dans l'un des trois états suivants : **Susceptible (S)** (Sain mais non immunisé), **Malade (M)**, et **Immunisé (I)** (sain et immunisé contre la maladie). L'état d'un individu peut changer d'un jour à l'autre selon les règles suivantes :

- Un individu susceptible **(S)** a une probabilité de 0,95 de le rester et de 0,05 de devenir malade **(M)**,
- Un individu malade **(M)**, a une probabilité de 0,9 de le rester et de 0,1 de devenir immunisé **(I)**,
- Un individu immunisé **(I)** reste à cet état à une probabilité de 0.98, et passe à l'état susceptible **(S)** à une probabilité égale à 0.02

1. Donner la matrice de transition P de la chaîne de Markov qui modélise l'état d'un individu par rapport à cette maladie, avec comme espace d'états $E\{S, M, I\}$.Tracer le graphe correspondant.
2. Sachant qu'au départ la proportion des individus malades dans la population est de 4% des individus et les autres étaient susceptibles (sains mais non immunisés). Calculer la proportion des individus de la population de chaque état après 30 jours. Pour faciliter les calculs :

$$P^{15} = \begin{pmatrix} 0{,}487 & 0{,}261 & 0{,}253 \\ 0{,}101 & 0{,}226 & 0{,}673 \\ 0{,}185 & 0{,}051 & 0{,}764 \end{pmatrix}$$

3. Cette chaine de Markov est-elle périodique ? irréductible ? récurrente ? Justifier vos réponses.

4. Existe-t-il une loi de probabilité stationnaire unique pour cette chaine ? Justifier votre réponse.

5. Le calcul par ordinateur de la puissance P^{100} de la matrice de transition a donné le résultat suivant (arrondi à 3 décimales) :

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0{,}250 & 0{,}125 & 0{,}625 \\ 0{,}250 & 0{,}125 & 0{,}625 \\ 0{,}250 & 0{,}125 & 0{,}625 \end{pmatrix}$$

Quelle sera la distribution des individus de cette population à long terme ?