Solution série N°: 2.

Exo 1: Montrons par récurrence que :

1) $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ... $(p(n))$.

- pour $n=1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ vérifié.
- pour $n \geq 2$: supposons que $p(n)$ est vraie et montrons que $p(n+1)$ est vraie i.e : $1+2+3+\dots+\frac{n(n+1)}{2}$ est vraie et montre que

$$1+2+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a : $1+2+\dots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

alors $p(n+1)$ est vraie. Donc :

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- pour $n=1$: $1 = \frac{1(2)(3)}{6} \Rightarrow 1=1$ vérifié.
- pour $n \geq 2$: supposons que : $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie

et montre que $1^2+2^2+\dots+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

On a : $1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Alors : $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exo 2 :

1) $u_n = \dfrac{\cos n - 2}{n^4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad -1 \leq \cos n \leq 1$

$$\Rightarrow -3 \leq \cos n - 2 \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{n^4} \leq \frac{\cos n - 2}{n^4} \leq -\frac{1}{n^4}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-3}{n^4} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n^4} = 0$, en utilisant le théorème des gendarmes on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) $V_n = \dfrac{3n + 5(-1)^n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{3n + 5(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{3n}{2n+1} + \dfrac{5(-1)^n}{2n+1}$.

$$= \frac{3}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{5(-1)^n}{2n+1}$$

D'une part, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{3}{2}$. D'autre part, comme $(-1)^n$ est bornée et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{2n+1} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5(-1)^n}{2n+1} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \dfrac{3}{2}$.

3) $W_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

On a $W_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$

Comme $(-1)^n$ est bornée et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

En revanche $(-1)^n$ n'admet pas de limite, montrons que c'est aussi le cas de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On considère les sous-suites de rangs pairs et impairs, respectivement $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$: On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$w_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{(-1)^{2n}}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

$$w_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -1 - \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$$

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet deux sous suites convergent vers des limites différentes, elle n'est donc pas converge.

4) $Z_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $Z_n = \dfrac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$.

$$= \frac{(\sqrt{2n+1})^2 - (\sqrt{2n-1})^2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.$$

$$= \frac{(2n+1) - (2n-1)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

EXO 3 :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1] \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{(u_n)^2}{4} \end{cases}$$

1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$. (raisonnement par récurrence).

- pour $n = 0$ on a : $u_0 \in]0, 1]$ donc $u_0 > 0$.
- pour $n \geq 1$ on a : supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

On a : $u_n > 0$ alors : $\dfrac{u_n}{2} > 0$ et $\dfrac{(u_n)^2}{4} > 0$ alors :

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{(u_n)^2}{4} > 0$. $\boxed{\text{Donc } \forall n\in\mathbb{N} : u_n > 0}$.

2) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 1$:

Pour $n = 0$, on a : $u_0 \in]0, 1]$ donc $u_0 \leq 1$.

Pour $n \geq 1$: supposons que : $u_n \leq 1$, et montrons que :

$u_{n+1} \leq 1$

on a : $0 < u_n \leq 1$ alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \leq 1.$$

$\boxed{\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 1}$

3) Calculons :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} - u_n = \frac{-u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

$$= \frac{u_n}{4}(-2 + u_n).$$

Comme $0 < u_n \leq 1$, on a : $-2 + u_n < 0$, par conséquent

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

ce qui montre que la suite est strictement décroissante.

4) La suite est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite notée $l \in [0, 1]$ et vérifie :

$$l = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \iff 0 = -\frac{l}{2} + \frac{l^2}{4}$$

$$\iff -2l + l^2 = 0$$

$$\iff l(-2 + l) = 0 \iff \begin{cases} l = 0 \\ \text{ou} \\ l = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Par conséquent : } l = 0.}$

Exo 4 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Montrons que u_n et v_n sont adjacentes :

a) $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **croissante**.

b) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n}$.

$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$

$= \frac{n + \cancel{n^2} + n - \cancel{n^2} - 1 - 2n}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{décroissante}}$.

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to\infty} \cancel{u_n} - \cancel{u_n} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$.

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exo 5 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$.

1) Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Notons $p = E(\sqrt{n})$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $p \leq \sqrt{n} < p+1$

donc : $p^2 \leq n < (p+1)^2$.

$\Rightarrow \frac{1}{(p+1)^2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p^2}$ ---(*)

multiplie (*) par $p = E(\sqrt{n}) > 0$ (car $n \geq 1$), alors :

$\frac{p}{(p+1)^2} < \frac{p}{n} \leq \frac{p}{p^2} \Rightarrow \frac{E(\sqrt{n})}{(E(\sqrt{n})+1)^2} < \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{1}{(E\sqrt{n})^2}$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $E(\sqrt{n}) \longrightarrow +\infty$. donc,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n} = 0.$$

puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 0.

2) Avec les même notations on multiplie les inégalités:

$$\frac{1}{(p+1)^2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p^2}$$

par $p^2 = (E(\sqrt{n}))^2 \geq 0$.

$$\frac{p^2}{(p+1)^2} < \frac{p^2}{n} \leq 1.$$

donc: $$\frac{E(\sqrt{n})^2}{(E(\sqrt{n})+1)^2} < \frac{E(\sqrt{n})^2}{n} \leq 1.$$

lorsque $n \longrightarrow +\infty$ alors: $E(\sqrt{n}) \longrightarrow +\infty$. donc.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(\sqrt{n})^2}{n} = 1$ puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 1.

Exo 6: calcule les limites:

1) $u_n = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right) \right].$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

2) $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \dots + n-1).$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^2}}{2\cancel{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

3) $w_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1.$$

4) $z_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

EXO 7: $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

1) Montrons que $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $n \geq n-1$. $\Rightarrow n^2 \geq n(n-1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

2) Montrons que (u_n) est majorée par 2:

On a, $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. alors,

$\dfrac{1}{2^2} < 1 - \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3^2} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$; .... ; $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

donc :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \Rightarrow u_n \leq 2.$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

3) Montre que (u_n) est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2^2}} - \cdots - \cancel{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

donc (u_n) est croissante.

4) On a : (u_n) est croissante et majorée par 2, alors (u_n) est convergente.

Exo 8 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n^2 + \frac{3}{2} \end{cases}$$

1) Montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > 0$

pour $n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{6} \cdot u_0^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 0.$

pour $n \geq 2 \Rightarrow$ supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$. On a $u_n > 0$ alors : $\frac{1}{6} u_n^2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} u_n^2 + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} > 0$$

donc $u_{n+1} > 0$

alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > 0.$

2) Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l alors :

$$l = \frac{1}{6} l^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow l^2 - 6l + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (l-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{l = 3}$$

3) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n < 3$.

faisons un raisonnement par récurrence :

pour $n = 0$ on a : $U_0 = 0 < 3$.

pour $n \geq 1$, supposons que $U_n < 3$ et montrons que $U_{n+1} < 3$.

on a : $U_n < 3$. donc $U_n^2 < 9 \Rightarrow \frac{1}{6} U_n^2 < \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} U_n^2 + \frac{3}{2} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

donc : $U_{n+1} < 3$.

alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n < 3$.

4) Calculons $U_{n+1} - U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{6} U_n^2 + \frac{3}{2} - U_n = \frac{1}{6}(U_n^2 - 6U_n + 9)$$
$$= \frac{1}{6}(U_n - 3)^2 > 0$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante,

et comme elle est bornée par 3, donc elle est convergente vers la limite l qui vérifie :

$$l = \frac{1}{6} l^2 + \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{l = 3}.$$