Solution du série N° 01 :

EXO 1 :

1/ Montrons que $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)$.

* On a : $\forall x \in A$: $x \geq \inf(A) \Rightarrow -x \leq -\inf(A)$

Donc "$-\inf(A)$" est un majorant de $-A$. et puisque $\sup(-A)$ est le plus petit majorant de $-A$ alors :

$\sup(-A) \leq -\inf(A)$ ... ①.

D'autre part :

$\forall -x \in -A$, $-x \leq \sup(-A) \Rightarrow x \geq -\sup(-A)$.

donc $-\sup(-A)$ est un minorant de A. et comme $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A alors $\inf(A) \geq -\sup($

donc : $-\inf(A) \leq \sup(-A)$ -- ②.

de ① et ② on a : $\sup(-A) = -\inf(A)$.

2/ $\inf(-A) = -\sup(A)$?

On a : $\forall x \in A$, $x \leq \sup(A) \Rightarrow -x \geq -\sup(A)$, donc $\sup($

est un minorant de $-A$, or $\inf(-A)$ est le p.g minorant de $-$

alors $-\sup(A) \leq \inf(-A)$ --- ①.

D'autre part on a ; $\forall -x \in -A$; $-x \geq \inf(-A)$.

$\Rightarrow x \leq -\inf(-A)$; donc $-\inf(-A) \geq \sup(A)$

$\Rightarrow \inf(-A) \leq -\sup(A) \ldots$ ②

de ① et ② on a ; $-\sup(A) = \inf(-A)$.

2/ Montrons que $\sup(A) \leq \inf(B)$. $\forall a \in A$, $b \in B$ et $a \leq b$:

on a : $\forall a \in A$, $b \in B$: $a \leq b \Rightarrow a \leq \inf(B)$

donc $\inf(B)$ est un majorant de A. et puisque $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A alors :

$\sup(A) \leq \inf(B)$.

3/ Montrons que $A \cup B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$:

soit $x \in A \cup B$, alors : $x \in A$ ou $x \in B$. donc ;

$\inf(A) \leq x \leq \underbrace{\sup(A)}_{\leq \max(\sup(A), \sup(B))}$ et $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$.

alors ; $\min(\inf(A), \inf(B)) \leq x \leq \max(\sup(A), \sup(B))$

a) on a : $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B) \ldots$ ①

$\inf(A \cup B) \geq \min(\inf(A), \inf(B)) \ldots$ ②

D'autre part on a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

donc :

$\sup(A) \leq \sup(A \cup B)$ et

$\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$

$\Rightarrow \max(\sup(A), \sup(B)) \leq \sup(A \cup B)$ ... (1*)

de (1) et (1*) on a,

$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

* De même manière on montre :

$\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

4| Montrons que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$:

soit $x \in A+B$, donc x est de la forme $a+b$ tel que : $a \in A$ et $b \in B$.

on a : $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$

donc : $x = a+b \leq \sup A + \sup B$

alors : $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$.

a) Montrons que :

$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

on a : $\forall x \in A$: $\inf A \leq x \leq \sup A$.

$\forall y \in B$: $\inf B \leq y \leq \sup B$.

donc :

$\inf A + \inf B \leq x+y \leq \sup A + \sup B$.

alors : $\inf A + \inf B$ est un minorant de $A+B$, et puisque $\inf(A+B)$ est le p.g de majorants alors :

$\inf(A+B) \geq \inf A + \inf B$ --- (1)

et aussi :

$\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ --- (2)

D'autre part on : $\forall x \in A$:

$x \leq \sup(A+B) - y$.

donc : $\sup(A+B) - y$ est un majorant de A.

$\Rightarrow \sup(A) \leq \sup(A+B) - y, \forall y \in B$

$\Rightarrow y \leq \sup(A+B) - \sup(A), \forall y \in B$

$\Rightarrow \sup(B) \leq \sup(A+B) - \sup(A)$

$\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$ --- (1*)

de (1) et (1*) on a :

$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

de même pour montrer que

$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

EXO 2:

1) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors : $r + x \notin \mathbb{Q}$:

On suppose que $x + r \in \mathbb{Q}$. On a, $r \in \mathbb{Q}$ donc $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ tq:
$r = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$

et $x + r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, p', q' \in \mathbb{Z}$ tq:
$x + r = \frac{p'}{q'}$, $q' \neq 0$.

alors : $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p'q - pq'}{q'q}$, $q \cdot q' \neq 0$

$\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$. c'est un contradiction car: $x \notin \mathbb{Q}$.

alors, $x + r \notin \mathbb{Q}$.

*) Montrons que: ~~$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$~~.
$x \notin \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Q}$ alors $x \cdot r \notin \mathbb{Q}$.

On a : $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$.
et $p \neq 0$ ($r \neq 0$).

supposons que, $x \cdot r \in \mathbb{Q}$ donc:
$x \cdot r = \frac{p'}{q'}$, $q' \neq 0$.

$x = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p' \cdot q}{q' p}$. $q'p \neq 0$

$\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$. contradiction.

donc $x \cdot r \notin \mathbb{Q}$.

2) Montrons que: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
alors, $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ tq:
$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$.

supposons que p et q sont premiers entre eux.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\sqrt{2} = p$
$\Rightarrow 2q^2 = p^2$.

donc p^2 est pair $\Rightarrow$ p est pair
alors, $p = 2p'$, $p' \in \mathbb{Z}$.
$2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2$
$\Rightarrow q^2 = 2p'^2$ alors: q^2 est pair $\Rightarrow q$ est pair.

contradiction. donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3) Montrons que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel:

supposons que $\frac{\ln 3}{\ln 2} \in \mathbb{Q}$ donc
$\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ tq: $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow q \ln 3 = p \ln 2$
$\Rightarrow e^{q \ln 3} = e^{p \ln 2} \Rightarrow 3^q = 2^p$.

* si $p = 0 \Rightarrow 3^q = 2^0 = 1$
$\Rightarrow q = 0$ contradiction ($q \neq 0$)

• si $p > 0$ donc : 3^q est impaire et 2^p est pair ~~contradict~~ contradiction.

donc $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

EXO 3.

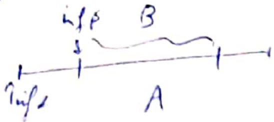
1) Montrons que si A est borné $\Rightarrow$ B est borné

A est borné $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A$
$m \leq x \leq M$.

on a $B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A$
et A est borné donc $m \leq x \leq M$
alors B est borné.

2/-) Montrons que : $\inf(A) \leq \inf(B)$

on a $B \subset A \Rightarrow \forall x \in B$: ~~x∈A~~
$x \geq \inf A$



donc $\inf A$ est un majorant de B.

et comme $\inf B$ est le p.g des majorants alors : $\inf A \leq \inf B$.

• Montrons que $\sup(A) \geq \sup(B)$:

on a $B \subset A$, alors $\forall x \in B$
$\inf A \leq x \leq \sup A$.

donc $\sup A$ est un majorant de B et comme $\sup B$ est le p.p des majorants alors :

$\sup(B) \leq \sup(A)$.

EXO 4 :

$A = \{ a_n \in \mathbb{R} / a_n = \frac{n+3}{\frac{n}{4}+1}, n \in \mathbb{N} \}$

1) Montrons que A est borné :

i.e : $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tq :
$\forall a_n \in A : m \leq a_n \leq M$.

on a : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\frac{n+3}{\frac{n}{4}+1} = 4\left(\frac{n+3}{n+4}\right)$

$= 4\left(\frac{n+4-1}{n+4}\right)$.

$= 4\left(1 - \frac{1}{n+4}\right) = 4 - \frac{4}{n+4}$.

on a : $n \geq 0 \Rightarrow n+4 \geq 4$.

$\Rightarrow \frac{1}{n+4} \leq \frac{1}{4}$.

$-\frac{4}{n+4} \geq -1$.

$\Rightarrow 4 - \frac{4}{n+4} \geq 3$.

$\Rightarrow a_n \geq 3$ ---- ①.

$n \geq 0 \Rightarrow n+4 \geq 4 > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{n+4} > 0$.

$\Rightarrow \frac{-4}{n+4} < 0 \Rightarrow 4 - \frac{4}{n+4} < 4$

$\Rightarrow a_n < 4$ ... ②

Alors : $\forall n \geq 0 : 3 \leq a_n < 4$.

donc. $\inf(A) = 3$ et

puisque $3 \in A$ alors:

~~$\inf(A) = \min(A)$~~

$\inf(A) = \min(A) = 3$. $(a_0 = 3 \in A)$

$\sup(A) = 4$.

montrons que $\sup(A) = 4$.

$$\sup(A) = 4 \iff \begin{cases} \forall a_n \in A.\ a_n < 4 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tq:} \\ a_n > 4 - \varepsilon. \end{cases}$$

on a $a_n < 4\ \forall a_n \in A$ est vérifié.

soit $\varepsilon > 0$, d'où $a_n > 4 - \varepsilon$.

$\Rightarrow 4 - \frac{4}{n+4} > 4 - \varepsilon$.

$\Rightarrow \frac{4}{n+4} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+4}{4} > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow n + 4 > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} - 4$

il suffit de prendre

$n_\varepsilon = [\frac{4}{\varepsilon} - 4] + 1$.

donc $\sup A = 4$

$B = \{ b_n \in \mathbb{R} \mid b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 4,\ n \in \mathbb{N} \}$

montrons que B est borné:

on a: $n \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{n} \leq 2 \wedge \frac{1}{n^2} \leq 1$.

$\Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3$

$\Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 4 \leq 7$.

$\Rightarrow b_n \leq 7$ --- ①

d'autre part on a:

$\frac{2}{n} > 0$ et $\frac{1}{n^2} > 0$

$\Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > 0$

$\Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 4 > 4$

$\Rightarrow b_n > 4$ -- ②

de ① et ② : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$4 < b_n \leq 7$.

donc B est borné dans $\mathbb{R}$

et $\sup B$ et $\inf B$ existent.

. 7 est un majorant de B et $7 \in B$ donc: $\sup B = \max B = 7$.

on montre que $\inf B = 4$.

$$\inf B = 4 \iff \begin{cases} \forall b_n \in B,\ b_n \geq 4 \text{ (vérif} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tq:} \\ b_n < 4 + \varepsilon \end{cases}$$

on a: $b_n < 4 + \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 4 < 4 + \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} < \varepsilon$

on a : $n^2 \geq n \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$

et $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \leq \frac{3}{n}$.

on cherche seulement un n_ε tq :

$\frac{3}{n} < \varepsilon$

on a : $\frac{3}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon}$.

il suffit de prendre

$n_\varepsilon = [\frac{3}{\varepsilon}] + 1$.

alors : $\inf B = 4 = \sup A$.

EXO 5 :

$A = \{an + b \mid n \in [-2, 1], a, b \in \mathbb{R}\}$

on suppose :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = ax + b$

* si $a = 0 \Rightarrow f(x) = b$

donc f est constante

alors $A = \{b\}$ est borné

et $\sup(A) = b = \inf(A)$

* si $a > 0$: alors f est croissante, et on a :

$-2 \leq x \leq 1$.

$f(-2) \leq f(x) \leq f(1)$

$-2a + b \leq f(x) \leq a + b$

donc $\forall x \in [-2, 1] \Rightarrow A$ est borné. ($\sup A$ et $\inf A$ existent)

$-2a + b$ est un minorant de A

et $-2a + b \in A$.

$\Rightarrow \inf A = \min A = -2a + b$.

et $\sup A = \max A = a + b$.

* si $a < 0$: donc f est décroissante.

De même chose on a

$\inf A = a + b$, $\sup A = -2a + b$.

$B = \{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

pour $n = 1 \Rightarrow B = 1$ et

pour $n \to +\infty \Rightarrow B = 2$.

donc $B = [1, 2[$.

la borne supérieure de B est $[2, +\infty[$ donc $\sup B = 2$

~~et 2 ∉ B ⇒ sup B ≠ max B = 2.~~

la borne inférieure de B est $]-\infty, 1]$, donc $\inf B = 1$.

et $1 \in B$ alors : $\inf B = \min B = 1$

(max $\nexists$).

EXO 6 : Mettre sous forme a+ib.

$$z_1 = \frac{5+2i}{1-2i} = \frac{(5+2i)(1+i)}{1^2+(i)^2}$$

$$= \frac{5+10i+2i-4}{1^2+(-2)^2} = \frac{-1+12i}{5}$$

$$= \frac{-1}{5} + \frac{12}{5} i.$$

$$z_2 = \frac{-2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-2(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-2(1+i\sqrt{3})}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Résoudre l'équation,

$$z^4 + (3-6i)z^2 - 8 - 6i = 0$$

on pose : $X = z^2$.

$$z^4 + (3-6i)z^2 - 8 - 6i = X^2 + (3-6i)X - 8 - 6i = 0.$$

le discriminant est

$$\Delta = (3-6i)^2 - 4(-8-6i)$$

$$= 9 - 36i - 36 + 32 + 24i$$

$$= 5 - 12i$$

les racines carrés de $5-12i$ sont :

$$(a+ib)^2 = 5-12i$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 5-12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & L_1 \\ ab = 6 & L_2 \end{cases}$$

on rajoute l'égalité des modules :

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144}$$
$$= \sqrt{169} = 13 . \quad L_3$$

$L_1 + L_3 \Leftrightarrow 2a^2 = 18$ donc

$a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$

$L_1 - L_3 \Leftrightarrow 2b^2 = 8$ donc $b^2 = 4$

alors $b = \pm 2$.

D'après L_2 : a et b ~~sont~~ ont le même signe donc les deux racines carrés de $5-12i$ sont : $3+2i$ et $-3-2i$.

+ les solutions de $X^2 + (3+6i)X + 8 - 6i = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{-(3-6i) - (3+2i)}{2} = -3+4i$$

$$X_2 = \frac{-(3-6i) + (3+2i)}{2} = 2i$$

a $X_1 = 3+4i = -4+4i+1$
$$= -(2-i)^2$$

donc $z^2 = -3+4i$ a deux solutions

$z_1 = -2+i$

$z_2 = -2-i$.

De plus : $X_2 = 2i = (1+i)^2$

donc $z^2 = 2i$ a deux solutions

$z_3 = 1+i$

$z_4 = -1-i$.

Exo 7 :

calculons : $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$:

Nous avons par la formule de Moivre :

$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^5$.

à l'aide de binôme de Newton :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta$
$-10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta$
$+5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$.

donc :

$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$.

$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$.

Exo 8 :

$|u| = \frac{|\sqrt{6}-i\sqrt{2}|}{2} = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

$u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

donc $|u| = \sqrt{2}$ et un argument de u est $-\pi/6$.

$|v| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$v = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $|v| = \sqrt{2}$ et un argument de v est $-\frac{\pi}{4}$.

$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}} = e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})}$

$= e^{i\pi/12}$

Donc $\left|\frac{u}{v}\right| = 1$ et un argument de $\frac{u}{v}$ est $\frac{\pi}{12}$.