République algérienne démocratique et populaire

Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Analyse I

Année 2022/2023
Domaine: LMD-informatique(1^{er} année)

Série d'exercices N°02

Exercice 1:

Montrer par récurrence que:

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2:

Déterminer, en justifiant vos réponses, si les suites suivantes sont convergentes:

1. $U_n = \frac{\cos n - 2}{n^4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $V_n = \frac{3n+5(-1)^n}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $W_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
4. $Z_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.(*)

Exercice 3:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres rérls définie par $u_0 \in]0, 1]$, et par la relation récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
2. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4:

Démontrer que les deux suites suivantes sont adjacentes:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Exercice 5:

1. On pose que $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
2. On pose que $v_n = \frac{E(\sqrt{n})^2}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6:

Calculer les limites suivantes, si elles existent, des suites suivantes définie par:

1. $u_n = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
2. $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$.

3. $w_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$.
4. $z_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

Exercice 7:

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 8:

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ u_n > 0$.
2. Calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ u_n < 3$.
4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure?

Exercice 9: (supplémentaire)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par:

$$u_n = \frac{1}{3+|\sin(1)|\sqrt{1}} + \frac{1}{3+|\sin(2)|\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{3|\sin(n)|\sqrt{n}}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.