République algérienne démocratique et populaire

Centre Universitaire de Mila — Année 2022/2023

Institut des Sciences et de la Technologie — Domaine: LMD-informatique(1^{er} année)

Analyse I

Série d'exercices N°01

Exercice 1:

Soient A *et* B deux ensembles non vides et bornées. On pose: $-A = \{-x|\ x \in A\}$, $A + B = \{x = a + b:\ a \in A,\ et\ b \in B\}$ et $A - B = \{x = a - b:\ a \in A,\ et\ b \in B\}$.

1. Montrer que: $\sup(-A) = -\inf(A)\ et\ \inf(-A) = -\sup(A)$.
2. Montrer que si pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leq b$, alors $\sup(A) \leq \inf(B)$.
3. Montrer que $A \cup B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et:
   (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
   (b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)(*)$.
4. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$ et:
   (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
   (b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Exercice 2:

1. Montrer que si $r \in \mathbb{Q}\ et\ x \notin \mathbb{Q}\ \ alors\ \ r + x \notin \mathbb{Q}$, et si $r \neq 0\ \ alors\ \ r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.
4. Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}\ \ et\ \ \sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.(*)

Exercice 3:

Soient A *et* B deux ensembles de $\mathbb{R}$ tel que $B \subset A$. Montrer que:

1. A est borné$\Longrightarrow$ B est borné.
2. $\inf(A) \leq \inf(B)\quad et\quad \sup(A) \geq \sup(B)$.

Exercice 4:

Soient $A = \left\{a_n \in \mathbb{R}|\ a_n = \frac{n+3}{\frac{n}{4}+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}\ \ et\ \ B = \left\{b_n \in \mathbb{R}|\ b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 4;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Montrer que A et B sont bornés dans $\mathbb{R}$ et que $\sup(A) = \inf(B)$.
2. Déterminer $\sup(B)\ \ et\ \ \inf(A)$.

Exercice 5:

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure si elles existent des ensembles suivantes:
$A = \{ax + b|\ x \in [-2, 1]\ \ et\ \ a, b \in \mathbb{R}\}$, $B = \left\{2 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $C = \left\{\sin \frac{2n\pi}{7},\ n \in \mathbb{Z}\right\}(*)$.

Exercice 6:

1. Mettre sous la forme $a + ib$, $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres:
   $z_1 = \frac{5+2i}{1-2i}$; $z_2 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$; $z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}(*)$.
2. Résoudre les équations suivantes:
   $z^4 + (3-6i)z^2 - 8 - 6i$, $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0(*)$.

Exercice 7:

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 8:

1. Calculer le module et un argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ *et* $v = 1 - i$.
2. En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Exercice 9:(supplémentaire)

Soit z une racine n-ieme de -1, donc $z^n = -1$ avec $n > 2$ *et* $z \neq -1$.
calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2(n-1)}.$$

$\boxed{\textit{Les exercices (*) sont laissés aux étudiants}}$