Chapitre 03 : Fonctions réelles d'une variable réelle :

1| Notions de bases sur les fonctions :

1.1 **Définition :** Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$.

En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

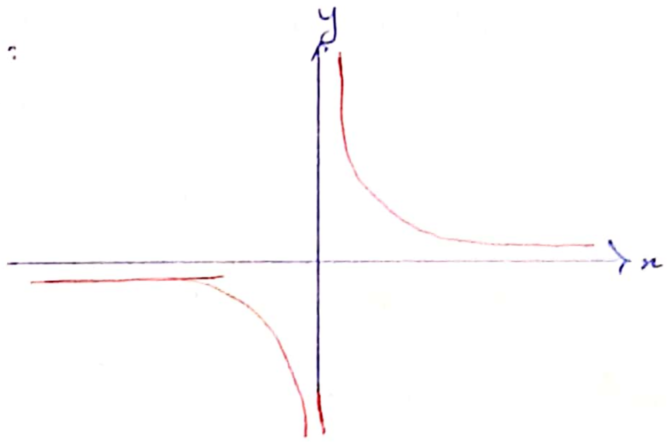
Remarque : Dans le cas $U = \mathbb{N}$, la fonction f définit une suite numérique.

1.2 **Graphe d'une fonction :**

Le graphe d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in U \}$.

exemple : La fonction inverse :

$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



1.3 **Opérations sur les fonctions :**

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- $f + g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in U$.

- $f \times g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, $\forall x \in U$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$, $\forall x \in U$.

1.4/ Fonctions majorées, minorées, bornées :

Déf: Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in U$: $f(x) \geq g(x)$.
- $f \geq 0$ si " " : $f(x) \geq 0$.
- $f > 0$ si " " : $f(x) > 0$.
- f est dite constante sur U si $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$: $f(x) = a$.
- f est dite nulle sur U si $\forall x \in U$: $f(x) = 0$.

Déf:
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est majorée sur U si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$: $f(x) \leq M$.
- f est minorée " si $\exists m \in \mathbb{R}$: $\forall x \in U$: $f(x) \geq m$.
- f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U. i.e. $\exists m, M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$
$$m \leq f(x) \leq M.$$

1.5/ Fonctions croissantes, décroissantes :

Déf: Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est croissante sur U si : $\forall x, y \in U$: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est strictement croissante sur U si : $\forall x, y \in U$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f est décroissante (resp. strict décroi) sur U si : $\forall x, y \in U$
$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (si $\forall x, y \in U$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)
- f est monotone (resp : strict monot) sur U si f est croissante ou

décroissante (resp. s. croissante ou strict décroissante).

Exemple:

- La fonction racine carée $\left\{ \begin{array}{l} f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow \sqrt{x} \end{array} \right.$

est strictement croissante.

- La fonction valeur absolue:

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$ n'est ni croissante, ni décroissante.

par contre la fonction: $\left\{ \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow |x| \end{array} \right.$ est s. croissante.

1.6/ Composition de fonctions:

Déf: Soient I, J et K des intervalles de $\mathbb{R}$. et soient f et g deux fonctions. telle que:

$$f: I \longrightarrow J \quad \text{et} \quad g: J \longrightarrow K.$$

alors, la fonction composée de f et g est définie par:

$$g \circ f: \begin{array}{l} I \longrightarrow K. \\ x \longmapsto g(f(x)). \end{array}$$

1.7/ Parité et périodicité:

Déf: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a,a[$ ou $[-a,a]$ ou $\mathbb{R}$).

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle.

On dit que:

- f est paire si $\forall x \in I$: $f(-x) = f(x)$.
- f est impaire si $\forall x \in I$: $f(-x) = -f(x)$.

Déf: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction est dite périodique de période T si : $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x+T)$.

Exemples

- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodique.
- La fonction tangente est π-périodique.

2/ Limite d'une fonction:

2.1/ Voisinage d'un point x_0:

Déf: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de x_0 tout intervalle ouvert de la forme : $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\delta > 0$.

Déf: Soit f une fonction ($f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est défini au voisinage de x_0 si : $\exists \delta > 0$: $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq E$.

2.2/ Limite d'une fonction:

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0. Soit $l \in \mathbb{R}$, on dit que f a pour limite l en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 5x - 3$

Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \neq 1 : |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

on a : $\forall \varepsilon > 0, |5x - 3 - 2| < \varepsilon \Rightarrow |5x - 5| < \varepsilon \Rightarrow 5|x - 1| < \varepsilon$

donc, $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$ alors, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$ tq : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

2.3/ Limite à gauche et à droite :

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0.

- on dit que f admet une limite l à droite de x_0 si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

on écrit : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x > x_0} f(x) = l.$

- On dit que f admet une limite l à gauche de x_0

si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

on écrit : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x < x_0} f(x) = l.$

- Si f admet une limite au point x_0 alors,

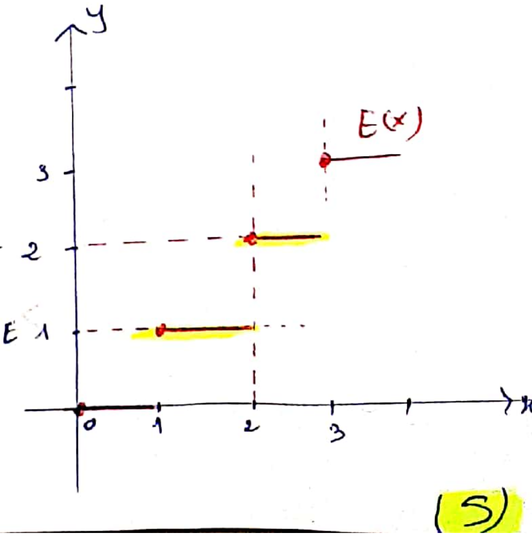
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l.$

Exemple : considérons la fonction partie entière au point $x = 2$

- comme $\forall x \in]2, 3[$ on a : $E(x) = 2$, $\lim\limits_{2^+} E(x) = 2$
- Comme $\forall x \in]1, 2[$, on a : $E(x) = 1$, $\lim\limits_{2^-} E(x) = 1$

limite à droite $\lim\limits_{2^+} E$ 2

limite à gauche $\lim\limits_{2^-} E$ 1



ces deux limites étant différentes, on en déduit ... la limite en 2.

Proposition :

- Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Proposition :

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g = l'$, $l, l' \in \mathbb{R}$, alors :

- $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda . f) = \lambda \lim\limits_{x_0} f$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g) = l + l'$ et $\lim\limits_{x\to x_0} (f\times g) = l\times l'$.
- si $l \neq 0$ alors ; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f = l'$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$, $l' \neq 0$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.
- si $f \leq g$ alors ; $l \leq l'$
- si $f \leq g \leq h$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f = \lim\limits_{x\to x_0} h = l \in \mathbb{R}$ alors ; $\lim\limits_{x\to x_0} g = l$

2.4/ Cas où x est infini :

$f(x) \in [A, +\infty[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R} : x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R} : x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$) $\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: $x > B \Rightarrow f(x) > A$ (resp : $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: $x > B \Rightarrow f(x) < -A$)

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (resp : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$) si, $\forall A > 0, \exists B > 0,$
$\forall x \in \mathbb{R}, x < -B \Rightarrow f(x) > A$. (resp, si $\forall A > 0, \exists B > 0,$
$\forall x \in \mathbb{R} : x < -B \Rightarrow f(x) < -A$).

2.5/ Formes indéterminées :

Dans le cas, où on ne peut pas calculer, on dit qu'on se trouve en présence d'une forme indéterminée.

$+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$.

- Il y a d'autres cas de formes indéterminées de type :

1^{∞}, 0^{∞}, ∞^{0}.

3) Fonctions continues :

3.1/ Continuité en un point :

$x_0 \in D_f$
$\lim f = f(x_0)$

Déf : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction

- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

3.2/ Continuité à gauche et à droite :

- On dit que f est continue à droite de $x_0 \in I$ si :

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$.

- On dit que f est continue à gauche de x_0 si :
$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

Théorème :

f est continue en $x_0 \iff \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$$

Montrer que f est continue.

On a f est continue en tout point x_0 dans $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^* ; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

donc : $\forall \varepsilon > 0$, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$$

donc $\exists \delta = \varepsilon(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$ tq : $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

proposition :

- Soient f et g deux fonctions continues en x_0, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(f+g)$, $(f \times g)$, (λf), $|f|$ et $\left(\frac{f}{g}\right)$ $(g(x_0) \neq 0)$ sont des fonctions continues en x_0.

- Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

3.3 | prolongement par continuité :

Déf : soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf en x_0 ($x_0 \notin D_f$) et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par,

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

et continue en x_0.

on appelle $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?

$\Rightarrow$ Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement et la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3.4/ Suites et continuité:

Proposition: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors:

f est continue en x_0 $\iff$ pour tout suite (u_n) qui converge vers x_0 la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

3.5/ fonctions discontinues:

Définition:

1) si f n'est pas définie en x_0, alors f est discontinue en x_0.

2) si f est définie au voisinage de x_0. On dit que f est discontinue en x_0 si:

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0, \ \exists x \in I : |x - x_0| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

3) si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$, alors f est discontinue en x_0 et x_0 est un point de discontinue de première espèce.

4) si l'une des deux limite $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$ ou bien les deux limites n'existe pas ou n'est pas finie, alors f est discontinue en x_0 et x_0 est un point de discontinue de $2^{ème}$ espèce.

5) si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) \neq f(x_0)$, alors f est discontinue en x_0.

3.6/ Fonctions continues sur un intervalle,

Déf: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. On dit que la fonction f est continue en I si et seulement si elle est continue en chaque point de I.

On note $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

3.7/ Fonctions uniformément continues sur un intervalle:

Déf: Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur I si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in I: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

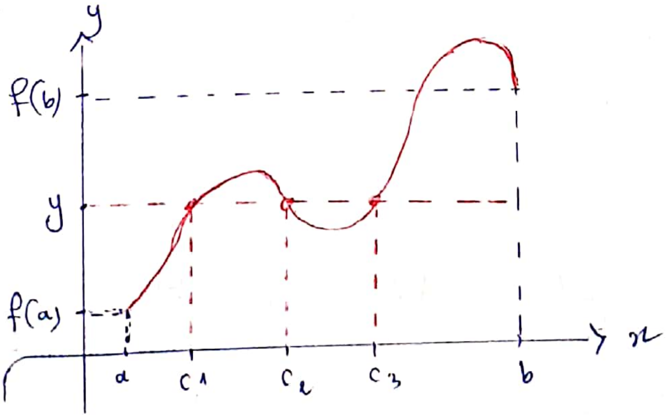
Remarque:

- f est uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ est continue sur I.

3.8/ Théorèmes sur les fonctions continues:

1) *Théorème:* (des valeurs intermédiaires):

Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists\, c \in [a,b]$ tel que: $f(c) = y$.



Corollaire:

Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Corollaire:

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, Alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème: (Heine).

soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$. i.e: $\sup\limits_{[a,b]} |f(x)| < +\infty$.

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ atteint ses bornées. i.e: $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ tel que:

$$f(x_1) = \sup_{[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_2) = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Remarque:

1) L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé.

2) Si I n'est pas fermé alors l'intervalle $f(I)$ n'est pas nécessairement de nature de I.

Exemple:

*) $f(x) = x^2$, $f(]-1, 1[) = [0, 1[$

3.9) propriétés des fonctions monotones sur un intervalle:

Théorème:

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

f est continue sur $I \Rightarrow f(I)$ est un intervalle.

Théorème:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors:

f est injective sur $I \Rightarrow f$ est strictement monotone sur I.

Théorème: (de la fonction réciproque).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone, alors la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ existe et elle est continue et strictement monotone sur $f(I)$.

Théorème du point fixe:

Déf: Soit $f : I \to I$ et soit $x \in I$.

On dit que x est un point fixe de f si: $f(x) = x$.

Déf: Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue, alors f admet au moins un point fixe dans $[a,b]$.

i.e: $\exists\, x \in [a,b]$ tq: $f(x) = x$.